

R2001-01

**STIMA DI STRUTTURE A TERMINE:
IL CASO DEI CORPORATE SPREAD FINANZIARI**

Enrico Bernini – Dean Fantazzini

**STIMA DI STRUTTURE A TERMINE:
IL CASO DEI CORPORATE SPREAD FINANZIARI***

Enrico Bernini** – Dean Fantazzini***

R2001-01

Editing: R. Caravaggi

Milano, Settembre 2001

* *Gli autori desiderano ringraziare Maila Bozzetto e Rodolfo Dozio per la preziosa discussione del presente lavoro. Si desidera ringraziare inoltre i numerosi partecipanti al dibattito successivo alla presentazione del documento presso Studi e Analisi Finanziaria - IntesaBci nel mese di settembre 2001. Gli errori rimasti sono nostri.*

** Studi e Analisi Finanziaria – IntesaBci e-mail: enricobernini@intesabci.it

*** Facoltà di Economia - Università di Bologna e-mail: deanfa@tin.it

1. INTRODUZIONE

L'idea secondo la quale il tasso di interesse da applicare ad una attività finanziaria dipende della sua scadenza, rende necessario definire una *struttura dei tassi a termine* funzione del tempo che consenta di attualizzare un dato flusso di cassa a un tasso specifico in relazione al tempo in cui questo si presenta. Per questo motivo la struttura a termine di un mercato finanziario ha sempre assunto un'importanza cardinale all'interno degli studi economici e finanziari.

Ciò nonostante le metodologie adottate per la stima di strutture a termine presentano nella maggior parte dei casi limitazioni tali da circoscriverne l'impiego ad ambiti ristretti o che presentano difficoltà in fase di stima.¹

L'intento di questo lavoro è dunque quello di introdurre una nuova metodologia per la stima delle strutture a termine di due classi distinte di attività finanziarie: titoli di stato o governativi (che per definizione non ammettono un rischio di credito, in breve titoli *risk-free*) e titoli obbligazionari emessi da enti emittenti che presentano un rischio di credito (titoli *corporate*). In particolare ci occuperemo della stima del differenziale o *spread*, che tipicamente esiste tra le obbligazioni *corporate* ed i titoli di stato *risk-free* appartenenti ad una stessa area monetaria, in tal caso l'euro. Poiché per una medesima scadenza tale differenza tra le strutture a termine dei due mercati riflette il diverso merito di credito dell'istituto di emissione, la funzione differenza tra queste due curve di tassi prende il nome di curva *credit spread*.

Questa metodologia consiste nell'impiego di funzioni elementari che nell'insieme permettono di ottenere una buona rappresentazione della funzione (continua) di sconto.

Il lavoro si compone delle seguenti parti. La teoria di questi strumenti è introdotta nel secondo capitolo, il quale illustra con esempi di calcolo i meriti di questa proposta metodologica rispetto a tecniche precedenti ed oggi alternative.

¹ Si veda ad esempio la tecnica del bootstrap.

Il terzo capitolo riporta invece un'applicazione relativa ai mercati dei titoli di stato tedeschi (*Bund*) e dei titoli *corporate* emessi da istituti finanziari (settore bancario). In particolare, viene presentato un nuovo modello, recentemente introdotto nella prassi operativa e che fa uso della tecnica delle *B-Spline*, per ottenere stime di curve *credit spread* statisticamente più robuste e prive di quelle oscillazioni e irregolarità che invece caratterizzano i tradizionali metodi di stima. Dopo l'iniziale esposizione formale del modello, sarà presentata un'applicazione pratica dello stesso con riferimento alle emissioni corporate del comparto finanziario e bancario in quanto rappresentano la maggioranza delle emissioni obbligazionarie private. (Il codice per il calcolo di *B-spline* più frequentemente utilizzate - cubiche e quadratiche - in ambiente Microsoft Excel® è stato riportato in appendice al presente documento.)

Infine, il quarto capitolo riassume le principali conclusioni del lavoro svolto.

2. L'UTILIZZO DELLE *B-SPLINE* NELLA DETERMINAZIONE DELLA CURVA ZERO-COUPON DEI TASSI D'INTERESSE

2.1. Il problema della struttura a termine dei tassi

La struttura a termine dei tassi di interesse tradizionalmente rappresenta un insieme di tassi zero coupon, che differiscono soltanto per la loro scadenza. Le ragioni che spingono a calcolare una tale struttura sono diverse: per esempio, ai fini della valutazione di altri flussi di cassa futuri o per testare le teorie di evoluzione stocastica della struttura a termine. Tuttavia, ad eccezione dei titoli a breve scadenza come i *Treasury Bill* o i *Bot*, nella maggior parte dei paesi sovrani i titoli di stato pagano delle cedole, cosicché i tassi zero coupon non sono direttamente osservabili.

Gli studi che si sono posti l'obiettivo di stimare la struttura a termine hanno utilizzato diversi metodi al fine di estrarre la curva zero dai prezzi di mercato, facendo uso della tradizionale *equazione dei flussi di cassa scontati*:

$$P = \frac{C_1}{1 + R_1} + \frac{C_2}{1 + R_2} + \dots + \frac{C_n}{1 + R_n} \quad (2.1)$$

dove il prezzo di mercato del titolo è P , le cedole pagate al termine dei periodi 1, 2, ... n sono $C_1, C_2, \dots, C_n$, mentre i tassi spot zero coupon utilizzati per scontare tali flussi sono $R_1, R_2, \dots, R_n$ (detta per questo equazione dei flussi di cassa scontati, i.e. *discounted cash flow, DCF*).

Il particolare metodo scelto è determinato in larga parte dall'uso che si vuole fare della struttura a termine stimata; tuttavia due sono le tecniche che hanno prevalso fino alla metà degli anni '90 ed entrambe costituiscono un'approssimazione lineare della funzione di sconto *risk-free*, anche se differiscono nella scelta della funzione approssimatrice: McCulloch (1971) utilizza una funzione polinomiale "*spline*", mentre Schaefer (1973 e 1981) utilizza i polinomi di Bernstein. Tuttavia, a meno che le funzioni spline siano scelte con molta cura, può sorgere il problema di avere matrici dei regressori quasi perfettamente collineari: Shea (1982) dimostra che questo è purtroppo il caso della formulazione utilizzata da McCulloch.

Nel seguito di questo lavoro sarà esposta una forma di funzione spline che non è soggetta a questo genere di problematiche e che rappresenta una delle più interessanti novità in questo campo di studio: prima però, si espongono brevemente le principali metodologie di calcolo che si sono susseguite alla fine del secolo scorso.

2.2. Metodologia di calcolo e studi precedenti

2.2.1. La stima discreta dei fattori di sconto.

Dal punto di vista teorico, la stima della struttura a termine è relativamente semplice. Si assuma di avere un insieme di m titoli, dove l' i -esimo titolo ha un prezzo P_i , paga un ammontare C_{ij} al tempo t_j , con n scadenze equidistanti nel tempo. Se i vettori dei flussi di cassa sono linearmente indipendenti ed il numero dei titoli supera il numero delle date di pagamento, allora poiché i flussi di cassa futuri sono noti ed i prezzi vengono presi dal mercato, le funzioni di sconto possono essere stimate con i minimi quadrati ordinari (MQO; noti più frequentemente come *ordinary least squares*, i.e. *OLS*) utilizzando la seguente equazione:

$$P_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} d_{t_j} \quad (2.2)$$

dove d_{t_j} è il fattore di sconto relativo al tempo t_j . Il fattore di sconto è equivalente al prezzo di uno *zero-coupon* bond pagante 1 € al tempo t_j (in ogni stato della natura). Da ogni fattore di sconto può essere calcolato il relativo tasso d'interesse, e l'insieme di questi tassi definisce la cosiddetta **struttura a termine** dei tassi.

Una particolare applicazione di questa metodologia, che viene impiegata a livello operativo con successo nel mercato degli *swap*, è il cosiddetto "*Bootstrap*": data una curva di tassi *swap*, è possibile ricavare per via analitica la corrispondente struttura *zero-coupon*, a partire da un tasso per il quale si assume l'ipotesi seguente,

$$IRR_1 = i_{zc1} \quad (2.3)$$

dove l'IRR è l'acronimo inglese di tasso interno di rendimento (i.e. *Internal Rate of Return*).

Questo tasso di partenza del processo di calcolo è detto tasso di *bootstrap*. L'ipotesi (2.3) non è particolarmente restrittiva, in quanto il primo tasso della struttura a termine IRR utilizzato per calcolare la curva dei tassi *zero-coupon* è tipicamente un tasso assimilabile ad un tasso *zero coupon* (ad esempio, il tasso *swap* a un anno è un tasso *zero coupon* perché presuppone un solo pagamento a scadenza, senza flussi intermedi).

Partendo dalla (2.3) e procedendo in modo ricorsivo è possibile ricavare i tassi *zero-coupon* per le scadenze successive:

$$P_2 = \frac{IRR_2}{1+i_{zc1}} + \frac{Red + IRR_2}{1+i_{zc2}} \rightarrow i_{zc2}$$

$$P_3 = \frac{IRR_3}{1+i_{zc1}} + \frac{IRR_2}{1+i_{zc2}} + \frac{Red + IRR_3}{1+i_{zc3}} \rightarrow i_{zc3}$$

•

•

•

$$P_n \rightarrow i_{zcn}$$

dove, nel caso si utilizzi una curva di tassi di deposito o di tassi *swap* si può assumere, senza perdita di generalità,

$$P_1 = P_2 = \dots = P_N = 100 \% = 1$$

Red = prezzo di rimborso = 100 % = 1

Analiticamente,

$$i_{zc2} = \sqrt{\frac{1 + IRR_2}{1 - \frac{IRR_2}{1 + i_{zc1}}}} - 1$$

L'espressione per un generico tasso j , una volta calcolati i precedenti $j - 1$, sarà quindi

$$i_{zcj} = \sqrt[j]{\frac{1 + IRR_j}{1 - \frac{IRR_j}{\prod_{i=1}^{j-1} (1 + i_{zci})}}} - 1 \quad (2.4)$$

Come risulta dall'analisi dell'equazione (2.4), il metodo ricorsivo per il calcolo della curva *zero coupon* richiede che la curva dei tassi di partenza sia regolare e completa, in quanto il procedimento ricorsivo si basa sull'impiego dei precedenti ($j - 1$) tassi *zero-coupon* al fine di calcolare il j -esimo. Occorre inoltre che l'IRR j -esimo impiegato per il calcolo del corrispondente tasso *zero coupon*, abbia flussi posti solo e soltanto in corrispondenza dei $(j - 1)$ tassi *zero-coupon* calcolati in precedenza.

Questa tecnica viene utilizzata per estrarre i tassi *zero-coupon* dal mercato degli *interest rate swap*, beneficiando di due particolari caratteristiche di questi strumenti finanziari:

- a) l'esistenza di un unico tasso IRR per ogni scadenza;
- b) la presenza di una durata costante e non di una scadenza fissa. In altre parole nel mercato degli swaps il numero di "payments dates" (i punti in cui vengono calcolati i fattori di sconto e cioè le incognite) è uguale al numero di equazioni.

Al contrario, nei *bond* possono esistere titoli con medesima scadenza ma rendimenti diversi, inoltre i mercati obbligazionari, in particolare quelli europei, sono caratterizzati dalla presenza di titoli con date di stacco delle cedole diverse fra loro, determinando in tal modo un numero di incognite ben superiore a quello dei vincoli. È quindi evidente la difficoltà di applicare il *bootstrap* ai titoli obbligazionari, sia *government* che *corporate*.

2.2.2. Funzioni di approssimazione

Un approccio alternativo che evita queste difficoltà consiste nello stimare un'approssimazione lineare della funzione di sconto (continua). In altre parole, invece di stimare dei valori discreti d_{t_j} , si preferisce sostituire un'approssimazione del tipo:

$$d(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_l f_l(t) \quad (2.5)$$

e stimare i coefficienti α_l che vengono applicati alle L funzioni di approssimazione scelte. Infatti, sostituendo tale funzione nell'equazione del prezzo (2.2) e riformulandola, si ottiene:

$$P_i = \sum_{l=1}^L \alpha_l \sum_{j=1}^n C_{ij} f_l(t) \quad (2.6)$$

Anche in questo caso si ottiene un'equazione che può essere utilizzata all'interno di una regressione lineare, ma il numero dei coefficienti α_l da stimare non è soggetto ad alcuna limitazione e dipende dal grado di approssimazione della curva dei fattori di sconto che si vuole ottenere. *I discount factor sono infatti espressi come una combinazione lineare di alcune funzioni "base" $f_l(t)$.*

E' importante ricordare che al fine di giustificare un'approssimazione di tipo lineare si è fatto ricorso al Teorema di Weierstress²: a seconda del grado di accuratezza richiesto, può quindi rendersi necessario un polinomio di grado superiore. Tuttavia, utilizzare polinomi di grado molto elevato può generare dei problemi poiché, sebbene forniscano un'accuratezza maggiore, quando il numero dei dati è limitato, l'approssimazione ottenuta può fluttuare notevolmente all'interno dell'intervallo considerato.

Per evitare questo genere di problemi, McCulloch (1971 e 1975) utilizzò i cosiddetti "polinomi a tratti" (*piecewise polynomials*) o funzioni "*spline*": tuttavia Powell (1981) mise in evidenza come bisognasse porre molta attenzione nel momento di scegliere la forma delle funzioni base, da utilizzarsi come interpolanti all'interno dei diversi segmenti in cui l'intervallo di approssimazione veniva diviso. L'utilizzo di certe basi (e fra queste, proprio quelle utilizzate da McCulloch), può infatti generare una matrice dei regressori quasi perfettamente collineare, che determina degli errori quando si sottraggono grandi numeri.

² Tale teorema afferma che, dato un certo intervallo, si può approssimare ogni funzione continuamente differenziabile attraverso una funzione di tipo polinomiale

2.3. Funzioni spline appropriate: le “B-Spline”.

Una soluzione al problema evidenziato nel precedente paragrafo è rappresentata dalle cosiddette ‘B-Spline’, funzioni base continue, definite positive in un intervallo finito e identicamente uguali a zero nella restante porzione dello spazio di approssimazione. Questa costruzione impedisce la perdita di precisione al momento della cancellazione di grandi numeri e fa sì che esse godano di appropriate proprietà di convergenza³.

Prima di introdurre le funzioni B-Spline si ritiene tuttavia utile presentare brevemente, ma in termini rigorosi, la teoria dell’approssimazione polinomiale “a tratti” (*piecewise*), che rappresenta la base necessaria per comprendere il funzionamento delle “spline”. Sia $\xi[a,b]$ l’insieme delle funzioni continue a valori reali definite all’interno dell’intervallo $[a,b]$ sulla linea dei reali: si consideri ora il problema di decidere quale tipo di approssimazione $s(\cdot)$ scegliere, all’interno di $\xi[a,b]$, per una funzione f , dati solamente i valori della funzione

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

dove le ascisse dei dati sono in ordine ascendente

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b \quad (2.7)$$

Spesso un approccio adeguato a questo genere di problema, è quello di porre i dati in un grafico e definire $s(\cdot)$ come quella curva uniforme che interpola i dati. Ma si supponga tuttavia che $s(\cdot)$ sia una funzione di tipo analitico: in questo caso si perde ogni genere di flessibilità, poiché per continuità analitica, la forma di s in ogni parte dell’intervallo $[a,b]$ contribuisce a determinare il complesso della funzione di approssimazione. È perciò inefficiente limitare gli algoritmi di approssimazione di uso generale ad una singola forma polinomiale o razionale. Piuttosto, gran parte della flessibilità del metodo grafico può essere ottenuta lasciando che $s(\cdot)$ sia una funzione polinomiale ad intervalli (o polinomiale a tratti).

³ Si veda il capitolo 19, Powell (1981).

Un esempio di funzione polinomiale ad intervalli che si presenta frequentemente, è l'*interpolazione lineare* all'interno di una tavola di valori di funzione. Dati i precedenti valori (2.7), dove $x_1 = a$ e $x_m = b$, la funzione $s(\cdot)$ è definita su ciascuno degli m intervalli $\{[x_i, x_{i+1}]; i = 1, 2, \dots, m - 1\}$ dall'equazione

$$s(x) = \frac{(x_{i+1} - x)f(x_i) + (x - x_i)f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (2.8)$$

Perciò $s(\cdot)$ è composto da una sequenza di segmenti lineari retti che sono congiunti in modo tale che $s(\cdot)$ sia continua. Si definisce $s(\cdot)$ come un **polinomio a tratti, continuo e di grado k** se esso appartiene a $\xi[a, b]$ e se esistono $n+1$ punti $\{t_i; i = 0, 1, \dots, n\}$ che soddisfano le condizioni

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

in modo tale che s sia un polinomio di grado al massimo k su ognuno degli intervalli $\{[t_{i-1}, t_i]; i = 1, 2, \dots, n\}$. Si definisce inoltre s come una **funzione spline di grado k** se, in aggiunta ad essere un polinomio continuo di grado k , essa appartiene allo spazio $\xi^{(k-1)}[a, b]$: in questo caso gli $n-1$ punti interni $\{t_i; i = 1, 2, \dots, n - 1\}$ sono chiamati **nodi**.

Al fine di rappresentare lo spazio lineare delle *funzioni spline di grado k* e caratterizzate dai precedenti nodi, viene usata la notazione $\S(k, t_0, t_1, \dots, t_n)$. Powell (1981) dimostra che ogni funzione di questo spazio può essere espressa nella forma

$$s(x) = \sum_{j=0}^k c_j x^j + \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{n-1} d_j (x - t_j)_+^k, \quad a \leq x \leq b \quad (2.9)$$

dove il pedice “+” ha il significato

$$(x - t_j)_+ = \max [0, x - t_j],$$

e dove i parametri $\{c_j; j = 0, 1, \dots, k\}$ e $\{d_j; j = 1, 2, \dots, n - 1\}$ distinguono le differenti componenti di $\S(k, t_0, t_1, \dots, t_n)$. Di qui segue che la dimensione dello spazio è pari a $(n + k)$. Powell evidenzia tuttavia, che è alquanto inefficiente specificare una funzione

spline attraverso i valori dei coefficienti $\{c_j; j = 0, 1, \dots, k\}$ e $\{d_j; j = 1, 2, \dots, n - 1\}$, in quanto un alto numero di cifre decimali vengono perse all'aumentare di x (e questo purtroppo è il caso delle funzioni usate da McCulloch).⁴ Affinché il numero dei parametri di $s(\cdot)$ sia lo stesso della dimensione di $\mathbb{S}$, si può allora scegliere una determinata base di $\mathbb{S}$, ad esempio $\{\phi(x); j = 1, 2, \dots, k + n\}$, ed esprimere $s(\cdot)$ nella forma

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n+k} \lambda_j \phi(x), \quad a \leq x \leq b$$

dove i coefficienti $\{\lambda_j; j = 1, 2, \dots, k + n\}$ sono gli $n+k$ parametri che caratterizzano $s(\cdot)$. Una base appropriata per svolgere questo compito è data dalle basi di **B-Spline**, ovvero *funzioni continue, positive in un intervallo finito del dominio ed identicamente uguali a zero sopra un'ampia porzione dello spazio di approssimazione*.

La funzione

$$B_p^k(t) = \prod_{l=p}^{p+k+1} \left[\prod_{h=p, h \neq l}^{p+k+1} \frac{1}{(t_h - t_l)} \right] (t - t_l)_+^k \quad -\infty < t < +\infty \quad (2.10)$$

è conosciuta come *B-Spline* di ordine k -simo. Il pedice “ $_+$ ” alla fine dell'espressione ha il significato $(t - t_l)_+ = \max [0, (t - t_l)]$, mentre p denota il fatto che $B_p^k(t)$ assume valori diversi da zero per valori di t compresi nell'intervallo $[t_p, t_{p+k+1}]$. Esempi grafici di *B-Spline* di primo, secondo e terzo ordine sono presentati nella Figura 1.

⁴ Si veda anche in proposito il capitolo 19, Powell.

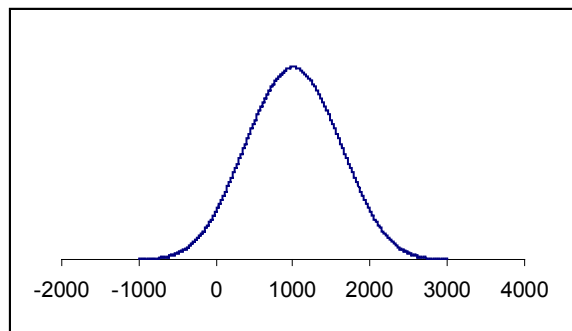
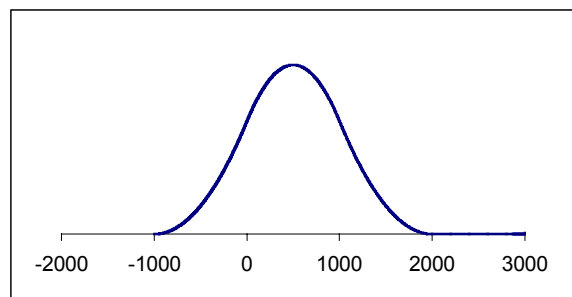
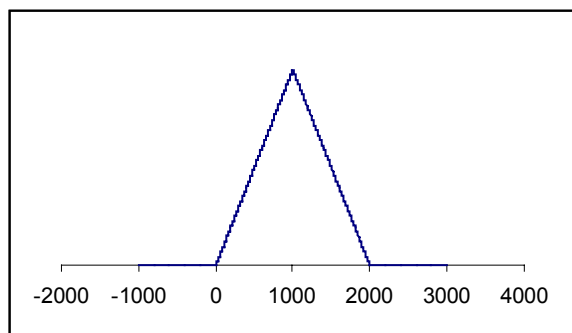
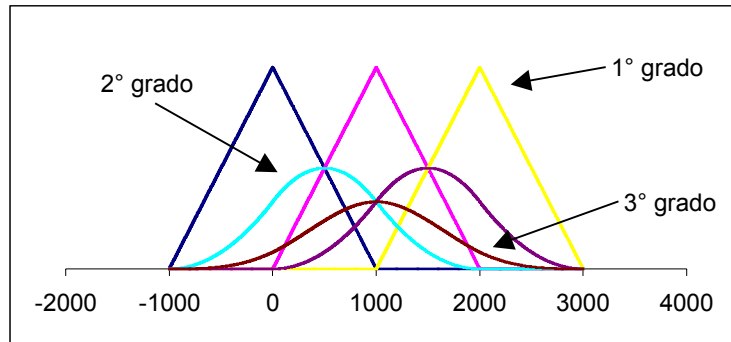
Figura 1A - *B-SPLINE* DI GRADO UNO, DUE, TRE

Figura 1B - B-SPLINE DI GRADO UNO, DUE, TRE (INSIEME)

*Esempio*

Per chiarezza d'esposizione si presenta ora un semplice esempio. Una funzione *B-Spline* lineare ($k=1$) è data dalla seguente espressione:

$$B_p(t) = \prod_{l=p}^{p+2} \frac{1}{(t_h - t_l)} (t - t_l) + \quad -\infty < t < +\infty \quad (2.11)$$

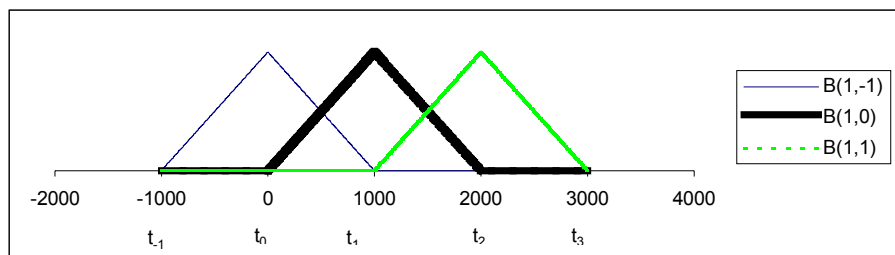
Essa è diversa da zero all'interno dell'intervallo $[t_p, t_{p+2}]$ ed assume i seguenti valori

$$B_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq t_p \\ (t - t_p) / (t_{p+1} - t_p)(t_{p+2} - t_p) & \text{per } t_p \leq t \leq t_{p+1} \\ (t_{p+2} - t) / (t_{p+2} - t_p)(t_{p+2} - t_{p+1}) & \text{per } t_{p+1} \leq t \leq t_{p+2} \\ 0 & \text{per } t \geq t_{p+2} \end{cases}$$

Poiché il nostro obiettivo è quello di costruire una base per lo spazio $\mathcal{S}(k, t_0, t_1, \dots, t_n)$ che è composto di *B-Spline*, il primo passo da farsi per costruire l'insieme delle $n+k$ funzioni base è quello di includere le $n-k$ funzioni $\{B_p: p = 0, 1, \dots, n-k-1\}$, poiché sono linearmente indipendenti e totalmente contenute in $\mathcal{S}$:

Se ad esempio assumiamo che lo spazio di approssimazione $[a,b]$ sia composto da due soli segmenti ($n = 2$) e ponendo $p = 0$, dobbiamo per prima cosa includere la funzione $B_0^1(t)$ che può essere stimata nel modo descritto in precedenza, e che è rappresentata dalla linea scura nella figura 2. Essa è continua ed assume i seguenti valori reali: nulla fino a t_0 , positiva e monotona strettamente crescente fino a t_1 , positiva e monotona strettamente decrescente da t_1 a t_2 , infine nulla da t_2 in avanti.

Figura 2 – B-SPLINE DI ORDINE UNO (O LINEARI)



Poiché abbiamo bisogno di $n + k$ funzioni base, ci occorrono ancora $2k$ funzioni base: un modo semplice per ottenerle in modo tale che siano ancora *B-Spline*, è quello di introdurre degli ulteriori nodi al di fuori dell'intervallo $[a,b]$. Specificatamente, assumiamo che $\{t_j; j = -k, -k+1, \dots, -1\}$ e $\{t_j; j = n+1, n+2, \dots, n+k\}$ siano dei punti qualsiasi sulla retta reale e che soddisfano le condizioni

$$t_{-k} < t_{-k+1} < \dots < t_{-1} < t_0 = a$$

$$b = t_n < t_{n+1} < \dots < t_{n+2} < t_{n+k}$$

Facendo riferimento all'equazione (2.10), possiamo ora definire le $n + k$ funzioni base B_p per $p = -k, -k+1, \dots, n-1$, ma ricordando di utilizzare il valore della funzione $B_p(x)$ solo se x è compreso nell'intervallo $[a,b]$. In questo modo il numero totale delle *B-Spline* è pari alla dimensione di $\mathcal{S}$ e, molto più importante, ne costituiscono una base.⁵ Ogni elemento di $\mathcal{S}$ può quindi essere espresso nella forma

⁵ Si veda in merito a questo risultato Powell, 1981.

$$s(x) = \sum_{j=-k}^{n-1} \lambda_j B_j(x), \quad a \leq x \leq b$$

Tornando al nostro esempio, si devono aggiungere i nodi t_1 e t_3 in modo tale che lo spazio di approssimazione sia attraversato da $n + k = 2 + 1 = 3$ funzioni base, $B_{-1}^1(t)$, $B_0^1(t)$ e $B_1^1(t)$ (si veda la Figura 2). Diviene quindi chiaro l'importante risultato generale secondo cui ogni segmento in cui è diviso lo spazio $[a,b]$ è attraversato al suo interno da $k + 1$ funzioni base $B_p^k(t)$, nel nostro esempio pari a due. La funzione di sconto che in seguito cercheremo di approssimare sarà quindi la combinazione lineare di $k + 1$ funzioni *spline* non nulle.

2.3.1. Il calcolo di B-Spline di ordine superiore a uno

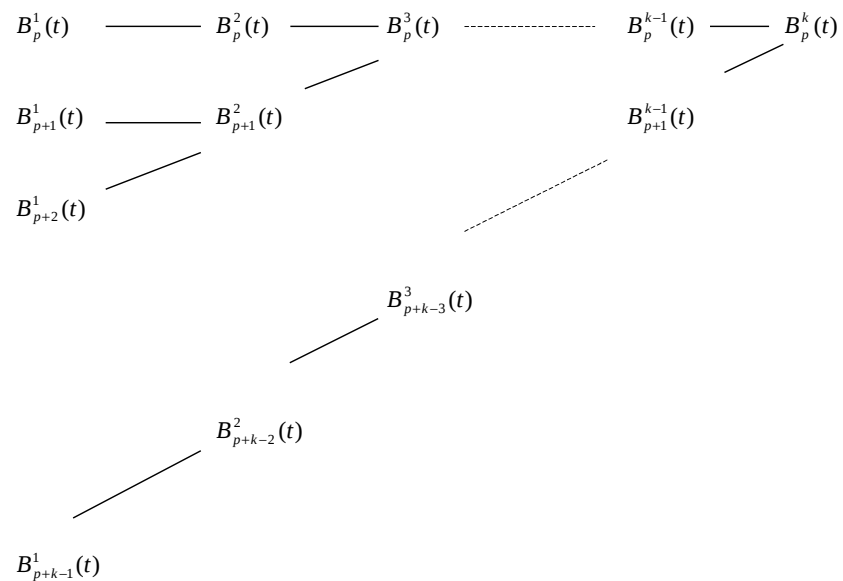
Quando si lavora con curve dei tassi, sia spot che forward, è desiderabile lavorare con curve regolari e non fluttuanti, così come previsto dai modelli di evoluzione stocastica della struttura a termine: per questo motivo una funzione spline di terzo ordine è quasi sempre necessaria. Il calcolo di una tale funzione così come previsto dalla formula (2.10) è quanto mai complicato, sia manualmente che assistiti da un computer. Per una *B-Spline* di ordine k vale la seguente relazione ricorsiva, per ogni valore reale del tempo t ,⁶

$$B_p^k(t) = \frac{(t - t_p)B_p^{k-1}(t) + (t_{p+k+1} - t)B_{p+1}^{k-1}(t)}{(t_{p+k+1} - t_p)} \quad (2.12)$$

suggerendo inoltre che siano calcolate seguendo il tableau rappresentato in Figura 3, calcolando le colonne in sequenza da sinistra verso destra.

⁶ Si veda per questa proprietà Powell, 1981.

Figura 3



Se t è compreso nell'intervallo $[t_p, t_{p+1}]$, allora i numeri nella prima colonna assumono i seguenti valori:

$$B_q^1(t) = 0 \quad q \neq p-1, \quad q \neq p$$

$$B_{p-1}^1(t) = (t_{p+1} - t) / (t_{p+1} - t_{p-1})(t_{p+1} - t_p)$$

$$B_p^1(t) = (t - t_p) / (t_{p+1} - t_p)(t_{p+2} - t_p)$$

Sappiamo già che per ogni porzione dello spazio di approssimazione sono necessarie almeno $k + 1$ funzioni, e come abbiamo visto, per il segmento $t_p \leq t \leq t_{p+1}$ queste iniziano con $B_{p-k}^k(t)$ e finiscono con $B_p^k(t)$.

Si vede inoltre abbastanza chiaramente che la relazione ricorsiva fornirà la prima della $k + 1$ funzioni richieste, $B_{p-k}^k(t)$, partendo dal calcolo iniziale delle k funzioni, da $B_{p-k}^1(t)$ a $B_{p-1}^1(t)$ ⁷. Per ottenere le prime due delle funzioni richieste $B_{p-k}^k(t)$ e $B_{p-k+1}^k(t)$, sono necessarie le $k + 1$ funzioni da $B_{p-k}^1(t)$ a $B_p^1(t)$. Similmente, e in generale, al fine di ottenere le $k + 1$ funzioni da $B_{p-k}^k(t)$ a $B_p^k(t)$, è necessario il calcolo delle $2k$ funzioni iniziali da $B_{p-k}^1(t)$ a $B_{p+k-1}^1(t)$.

2.4. La procedura di stima

Poiché il nostro obiettivo è stimare la funzione di sconto, il numero complessivo di funzioni base necessarie a tale scopo dipende da due variabili:

- a) la scadenza del titolo a più lungo termine;
- b) l'ampiezza dell'intervallo compreso fra due nodi.

In realtà quest'ultimo fattore dipende dal primo, dal momento che il posizionamento dei nodi deve essere fatto in modo tale da garantire la presenza di un numero simile di titoli in scadenza nei diversi intervalli.

Una volta individuato il numero dei nodi e quindi delle splines, possiamo passare alla fase di stima. Poiché, come abbiamo visto, il fattore di sconto è dato da una combinazione lineare di L funzioni *spline* di un certo ordine,

$$d(t) = \sum_{l=1}^L a_l f_l(t) \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (2.13)$$

dove a_l sono i pesi assegnati alle l funzioni $f_l(t)$, che dipendono solo dal tempo t , la formula DCF del prezzo di ciascun titolo obbligazionario diviene

⁷ Per capire questo risultato basta cambiare il pedice p con $p - k$ nel precedente tableau.

$$P_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \sum_{l=1}^L a_l f_l(t) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (2.14)$$

Riformulando l'espressione (14) si ottiene,

$$P_i = \sum_{l=1}^L a_l \sum_{j=1}^n C_{ij} f_l(t) \quad (2.15)$$

e in termini matriciali,

$$\begin{matrix} P & = & \mathbf{x}' & \boldsymbol{\alpha} \\ (m \times 1) & & (m \times L) & (L \times 1) \end{matrix} \quad (2.15a)$$

Una volta ottenuta la stima dei minimi quadrati del vettore $\boldsymbol{\alpha}$ dei coefficienti delle *B-Spline*, questo può essere sostituito nell'equazione (2.13) al fine di ottenere una stima della funzione di sconto. Come si vede dalle precedenti equazioni, la regressione lineare può essere usata fino a che il numero dei pesi delle funzioni *splines* è inferiore al numero di *bond* considerati, che è una condizione molto meno restrittiva rispetto a quella del numero delle date di pagamento dei flussi cedolari.

In generale, l'utilizzo del metodo delle *B-spline* permette quindi di superare due difficoltà riscontrabili nella stima della struttura a termine mediante le tecniche delle regressioni multiple o dell'interpolazione lineare attraverso funzioni polinomiali (come quelle usate da McCulloch):

- 1) l'esistenza di un maggior numero di “*payment dates*” rispetto alle obbligazioni, con la conseguenza che la soluzione non è unica ma vi sono più vettori di fattori di sconto;
- 2) la presenza di multicollinearità fra i regressori, derivante dal legame esistente fra i fattori di sconto.

Resta, tuttavia, il difetto non trascurabile dell'elevata sensibilità dei risultati della stima al posizionamento dei nodi, sebbene esso sia in parte superabile in un contesto di analisi *rich-cheap*.

2.4.1. La Rich-Cheap Analysis

La stima della curva dei tassi zero-coupon permette di calcolare i cosiddetti “prezzi teorici” dei titoli, a partire dai quali può essere svolta la *rich-cheap analysis*, cioè la valutazione di convenienza: se il prezzo di mercato è superiore a quello teorico il titolo è definito *rich*, nel caso contrario *cheap*. Il confronto, oltre che sui prezzi, può essere svolto mediante i rendimenti a scadenza: in questo modo gli scostamenti fra i tassi calcolati sulla base dei valori teorici e quelli ottenuti dai prezzi di mercato non sono influenzati dalla diversa *duration* dei titoli.

In realtà, la definizione di un'obbligazione come *rich-cheap* non si basa sul puro differenziale rispetto al rendimento teorico, dal momento che esistono anche condizioni di mercato in grado di pesare sul suo prezzo: ad esempio, i titoli *benchmark* sono normalmente *rich* rispetto a precedenti emissioni su scadenze simili. In questo caso, la sottovalutazione o sopravvalutazione non può prescindere dall'analisi storica di questo differenziale (tra il rendimento di mercato e quello teorico) oltre che dalle caratteristiche di liquidità del titolo stesso.

2.4.2. Vincoli alla funzione

Diversi autori tra i quali Rose e Schworm (1980) e Shea (1984) hanno messo in evidenza come le strutture a termine dei tassi di interesse stimate utilizzando le funzioni *spline* di McCulloch tendono a generare dei tassi *forward* che sono molto instabili e fluttuano ampiamente, dirigendosi spesso verso valori negativi.

Vasicek e Fong (1982) hanno notato che le funzioni di sconto sono principalmente di tipo esponenziale e poiché le funzioni polinomiali hanno una differente curvatura, una funzione *spline* polinomiale tenderà ad oscillare intorno alla funzione di sconto esponenziale, generando il genere di problemi sopra citati. Shea (1985) dimostrò però che le difficoltà di modellizzazione esponenziale con funzioni polinomiali non si presentano nel caso di approssimazioni polinomiali di tipo locale in piccoli intervalli. Egli evidenziò inoltre che le funzioni suggerite da Vasicek e Fong presentano le stesse probabilità di generare dei tassi *forward* instabili.

Una soluzione potrebbe essere quella di introdurre dei vincoli sui tassi *forward* così come fatto da Schaefer (1973 e 1981) ed esaminato da Shea (1984). Schaefer vincolò la pendenza della funzione di sconto in modo che fosse sempre negativa, mentre Shea trovò che semplici restrizioni sulle derivate prime erano spesso sufficienti.

Tuttavia, l'aggiunta di vincoli alle funzioni *spline* di approssimazione va fatta con molta cautela, in quanto lo stesso Shea (1984) ha dimostrato che la presenza di vincoli di non-negatività può alterare drammaticamente la struttura e la forma della curva dei tassi *forward* rispetto al caso in cui essi non siano imposti. L'unico vincolo che si può quindi pensare di imporre sulla funzione di sconto è quello di assumere un valore pari ad 1 al tempo zero per le $n+k$ funzioni base della combinazione lineare, cioè

$$d(0) = \sum_{l=p-k}^{l=p+n} \alpha_l \beta_l^k(0) = 1 \quad (2.16)$$

ed è questa la strada che è poi stata seguita a livello operativo.

2.5. Un'applicazione operativa delle B-Spline: il calcolo della curva zero-coupon estraibile dai prezzi di mercato dei titoli di stato tedeschi (Bund)

Per verificare l'efficacia operativa del metodo delle *B-Spline*, si è deciso di calcolare la curva dei tassi *zero-coupon* estraibile dai prezzi di mercato dei BUND tedeschi. L'insieme dei titoli considerati non comprende tutti i titoli in circolazione a causa della presenza di obbligazioni aventi un grado di liquidità molto ridotto (in special modo quelle con cedole molto elevate) o caratterizzate da certe peculiarità, come i "*Bund Unity*".

Più in particolare, sono stati analizzati due tipi di campioni:

- i) **Campione I:** 50 titoli aventi scadenza compresa fra il 21 febbraio 2001 e il 10 luglio 2010, con l'aggiunta di un titolo virtuale avente scadenza al tempo zero di valore pari a 100;

- ii) **Campione II**: il 1° campione + tutti i titoli con scadenza superiore a 10 anni, per un totale di 58 titoli.

Le quotazioni utilizzate per il presente lavoro sono state ottenute da Reuters il 9 novembre dopo le 17.30 a mercato chiuso, ma le analisi svolte via foglio Excel e qui di seguito presentate possono essere fatte anche in ambito infragiornaliero.

2.5.1. *Campione I (21 / 02 / 2001 – 10 / 7 / 2010)*

In relazione alla forma delle *B-Spline*, si è deciso di utilizzare quelle di terzo ordine per la loro capacità di approssimare in misura adeguata la curva dei fattori di sconto senza provocare eccessive oscillazioni dei tassi *forward*.

Nel campione preso in considerazione la scadenza massima è stata pari al 4 luglio 2010 e di conseguenza gli estremi dello spazio di approssimazione sono stati fissati come $a = 0$ e $b = 3600$ giorni (pari circa a 10 anni): tuttavia, la natura flessibile del processo di approssimazione ci permette di dire che l'unico vincolo nel posizionamento del nodo b è che esso sia superiore alla scadenza massima presente nel campione. Più è lontano, più in là nel tempo può essere calcolata la funzione di sconto: nondimeno, una volta superata la *maturity* massima presente nel campione, le stime della curva zero-coupon divengono piuttosto inaffidabili (Schaefer, 1981). Inoltre, poiché il numero di titoli con scadenza superiore al 2010 era limitato, si è deciso di calcolare la curva zero-coupon solo fino al 1 / 1 / 2010.

Con riferimento al posizionamento dei nodi interni, una direttiva di condotta potrebbe essere quella di dividere i titoli di stato fra quelli di breve, medio, lungo periodo così come si usa fare nei mercati. Tuttavia, questa suddivisione presta il fianco a due critiche:

- a) la definizione di “breve” periodo non è un qualcosa su cui ci sia un chiaro accordo: c'è chi dice vada riferita a titoli con maturity inferiore ad 1 anno, chi a 2 anni, fin'anche a 5 anni;

b) questo genere di divisione può causare un forte raggruppamento dei titoli, lasciando la parte a lungo termine scarsamente rappresentata.

Di conseguenza, il forte addensamento di titoli nella parte a “breve” del mercato può richiedere un’ulteriore suddivisione di questa fascia temporale, e così è stato fatto.

Al fine di evitare le inefficienze e gli errori derivanti da un modello sotto-parametrizzato, si è deciso di partire da uno sopra-parametrizzato e quindi cambiare la posizione ed il numero dei nodi fino a minimizzare gli *standard error* dei coefficienti delle splines considerate. Il risultato di questo processo è stata la divisione dello spazio di approssimazione in $n = 4$ segmenti: da 0 a circa 2,5 anni; da 2,5 a 5 anni; da 5 a 7,5; oltre 7,5 anni. Il numero di *spline* utilizzate è stato quindi pari a $n + k = 7$.⁸

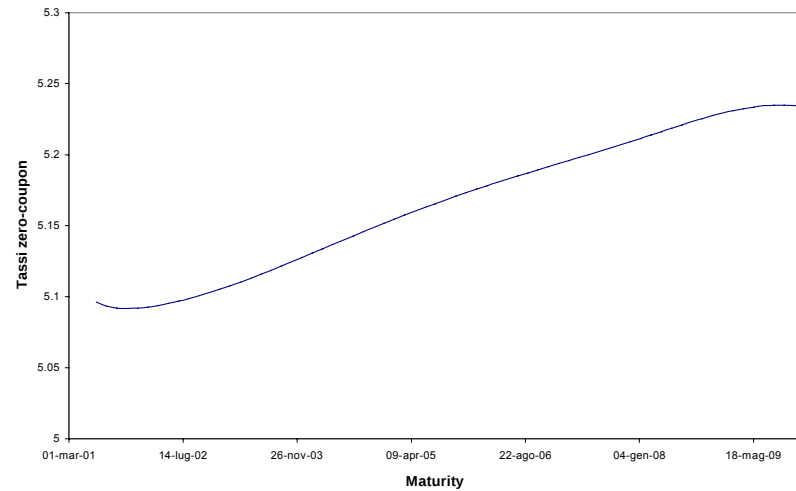
L’elenco completo dei nodi, compresi quelli al di fuori dello spazio di approssimazione, è il seguente:

	<i>B-Spline</i>	GOVERNMENT
	Start	End
NODO 1	-2700	900
NODO 2	-1800	1800
NODO 3	-900	2700
NODO 4	A = 0	3600
NODO 5	900	4500
NODO 6	1800	5400
NODO 7	2700	6300
NODO 8	B = 3600	
NODO 9	4500	
NODO 10	5400	
NODO 11	6300	

⁸ Dati quattro nodi ($n = 4$) e spline del terzo ordine ($k = 3$).

La figura 4 presenta l'applicazione del metodo *B-Spline* al caso appena descritto:

Figura 4 – CURVA ZERO



Coefficienti	Std Error
4052.528456	7.407704
3591.541482	1.303155
3177.264921	0.631784
2800.597336	0.689331
2466.038495	1.019647
2164.425737	2.045529
1955.168021	12.42056

A questo punto si è voluto osservare se i residui della regressione fossero o meno eteroschedastici: come si sa, in presenza di eteroschedasticità le stime OLS rimangono corrette, ma gli S.E. non sono più validi. In questo caso, si possono calcolare S.E. robusti e consistenti facendo ricorso alle matrici di covarianze e

varianze consistenti in presenza di eteroschedasticità (stime HAC), come quelle fornite da White o Newey – West.

Il test di eteroschedasticità di White ha rifiutato l'ipotesi di omoschedasticità ad un livello di confidenza dello 0,001 , indicandoci quindi la necessità di ricalcolare gli standard error attraverso una stima HAC.

Ecco i risultati:

Coefficienti	Std Error (stima HAC)	Std Error (Excel)
4052.528	17.31	7.41
3591.541	3.78	1.30
3177.265	2.25	0.63
2800.597	2.49	0.69
2466.038	3.26	1.02
2164.426	6.36	2.05
1955.168	30.10	12.42

Come si può vedere gli standard error sono aumentati in tutti casi, ma rimangono sempre su valori molto bassi, confermandoci quindi la robustezza dei coefficienti stimati. Si può notare tuttavia che si hanno valori più elevati per gli standard error nel caso della prima spline (pari allo 0,4 %) e nell'ultima (pari all' 1,5 %) .

Nel primo caso, ciò è dovuto ai problemi che il metodo delle splines incontra sulle scadenze più brevi: la necessità di posizionare il primo nodo in territorio ampiamente “negativo” (si ricorda, infatti, che per convenzione $a = 0$), fa sì che solo un segmento ridotto della prima spline intervenga effettivamente come variabile esplicativa. Questo aspetto negativo è di difficile superamento, anche con l'introduzione di ulteriori titoli sul segmento a breve, ed implica quindi una certa cautela nella valutazione dei risultati ottenuti su questa parte della curva.

Nel secondo caso invece, ciò è attribuibile al numero ridotto di titoli aventi una maturity compresa fra gli 8 ed i 10 anni: una possibile soluzione può essere quella di introdurre titoli di emittenti sovrani aventi rating uguale a quello dei Bund e facenti parte dell'area Euro, come ad esempio gli OAT francesi⁹.

Nel prossimo paragrafo (che affronta il problema dell'inclusione dei titoli trentennali), vedremo invece un'altra possibile soluzione, sicuramente non alternativa bensì complementare all'inserimento di titoli simili, che è rappresentata dall'allargamento delle distanze temporali fra i nodi nella parte terminale della curva e che comporta quindi l'abbandono degli intervalli regolari, così com'è stato fatto fino ad ora. Tornando invece al primo campione di analisi, c'è da dire che se la stima della struttura a termine è valida, la differenza fra i prezzi teorici calcolati come combinazione lineare di *B-Spline* ed i prezzi reali, dovrebbe essere trascurabile o comunque non molto superiore allo spread bid-ask: nel nostro campione la gran parte dei prezzi teorici differisce dai prezzi reali per meno dello 0,06 %, ed in nessun caso questa differenza è superiore allo 0,16 %. Il Root Mean Square Error (RMSE) relativo alla differenza fra prezzi è infatti pari a 7,62 centesimi, mentre quello relativo ai rendimenti a scadenza (molto più importante, in quanto non influenzato dalla diversa duration dei titoli) è pari a 4,10 punti base, entrambi quindi molto bassi e nell'ordine di grandezza dello spread bid-ask.

⁹ Una soluzione di questo genere è già stata presentata con riferimento ai BTP ed ai Bonos spagnoli, nella *Capital Markets Notes BCI* n. 11 anno 1999, e lì si rimanda per ulteriori chiarimenti

2.5.2. Campione II (21 / 02 / 2001 - il 04 / 01 / 2030)

L'inclusione del "trentennale" all'interno dello spazio di approssimazione ha sempre creato notevoli problemi nel processo di stima: la necessaria aggiunta di almeno altre due funzioni base a *segmenti regolari*, peggiorava infatti i risultati della regressione a causa degli elevati errori standard associati alle nuove *B-Spline* derivanti dal numero estremamente ridotto di titoli presenti sul tratto a lunghissimo termine della curva.

In questo lavoro si vuole invece mostrare come l'allargamento della distanza fra i nodi nella parte terminale della curva possa aiutare a mantenere bassi gli errori standard anche in presenza di un numero limitato di titoli, permettendoci di lavorare con una curva zero-coupon priva di eccessive oscillazioni o peggio, di veri e propri salti di continuità, come accadeva in precedenza. Come punto di partenza si è deciso di partire da un modello composto da 9 *B-Spline* e caratterizzato dai seguenti nodi:

	<i>B-Spline (giorni)</i>		<i>Coefficienti</i>	<i>Std. Error (HAC)</i>	<i>t-statistic</i>	<i>p-value</i>
NODO 1	-2700	900	4040.845	18.09417	223.3231	0.0000
NODO 2	-1800	1800	3593.590	3.831469	937.9146	0.0000
NODO 3	-900	2700	3176.092	2.190598	1449.875	0.0000
NODO 4		3600	2802.298	2.262954	1238.336	0.0000
NODO 5	900	4500	2462.245	2.257688	1090.605	0.0000
NODO 6	1800	10800	5432.742	7.225478	751.8869	0.0000
NODO 7	2700	18900	6250.707	68.83560	90.80631	0.0000
NODO 8	3600	28800	58.08914	140.5391	0.413331	0.6795
NODO 9	4500	40500	25678.57	1721.431	14.91699	0.0000
NODO 10	10800					
NODO 11	18900					
NODO 12	28800					
NODO 13	40500					

Come si può osservare dalla precedente tabella, l'ottava *spline* può essere eliminata in quanto non significativa. Il modello definitivo è quindi il seguente:

	<i>B-Spline (giorni)</i>		<i>Coefficienti</i>	<i>Std. Error (HAC)</i>	<i>t-statistic(*)</i>	<i>p-value(*)</i>
NODO 1	-2700	900	4042.715	18.31720	220.7059	0.0000
NODO 2	-1800	1800	3593.176	3.901259	921.0300	0.0000
NODO 3	-900	2700	3176.371	2.256153	1407.870	0.0000
NODO 4		3600	2801.855	2.415667	1159.868	0.0000
NODO 5	A = 900	4500	2463.220	2.970153	829.3244	0.0000
NODO 6	1800	10800	5428.400	10.95057	495.7185	0.0000
NODO 7	2700	18900	6285.060	39.27322	160.0342	0.0000
NODO 8	3600	28800				
NODO 9	4500	40500	26104.34	1083.160	24.10017	0.0000
NODO 10	B = 10800					
NODO 11	18900					
NODO 12	28800					
NODO 13	40500					

(*) *Sebbene non siamo nella condizione di poter introdurre l'ipotesi di normalità dei residui, la dimensione molto piccola degli standar error rispetto ai coefficienti, ci permette di considerare quest'ultimi altamente significativi.*

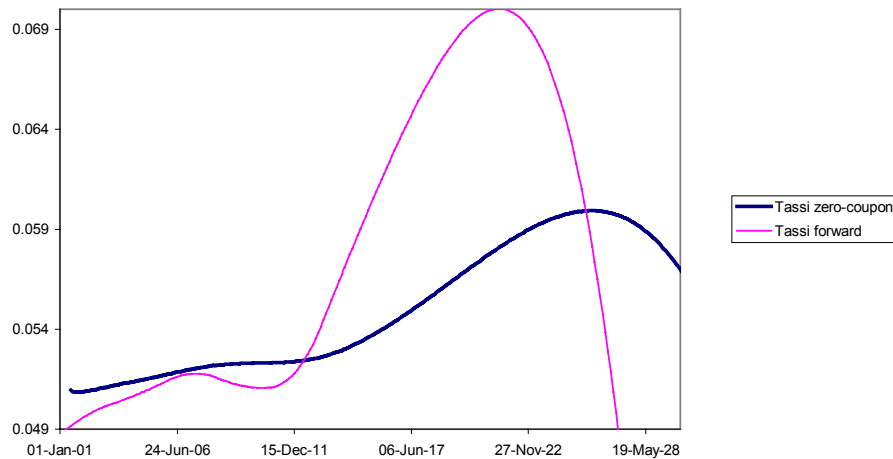
Come si può osservare dalla tabella, tutti i coefficienti sono significativi e gli errori standard sono in quasi tutti i casi inferiori allo 0,6 %, ad eccezione dell'ultima spline dove è pari al 4,2 %: questo risultato è dovuto al numero limitato di titoli compresi nell'intervallo di approssimazione dell'ultima spline che va da 4500 giorni (poco più di 12 anni) a 10800 giorni (poco meno di 30 anni). Come si è già detto in precedenza, allargare gli intervalli di tempo delimitati dagli ultimi nodi, vuole essere una soluzione complementare e *non* alternativa all'inserimento di titoli simili ai Bund, come gli OAT francesi o i titoli di stato olandesi, entrambi titoli sovrani con rating AAA appartenenti all'area Euro.

Una conferma indiretta di questa affermazione ci viene data dalla penultima spline, che va da 2700 giorni a 18900 giorni: in questo caso infatti, la presenza di soli 7 titoli in più oltre ai titoli ventennali e trentennali, permette di abbassare lo standard error fino allo 0,6 %.

È interessante notare come gli ultimi 4 nodi, i cui valori sono stati trovati minimizzando gli standard error, sono in realtà una combinazione lineare della progressione aritmetica caratterizzante i primi 9 nodi ($-2700 + 900 X$, con $x = 0, 1, \dots, 8$): 10800 è infatti pari a $[(-2700 + 900 \cdot 9) \cdot 2]$, 18900 a $[(-2700 + 900 \cdot 10) \cdot 3]$, 28800 a $[(-2700 + 900 \cdot 11) \cdot 4]$, e 40500 a $[(-2700 + 900 \cdot 12) \cdot 5]$; in altri termini una progressione geometrica applicata ad una progressione aritmetica.

Il grafico della curva zero-coupon e di quella forward in questo modo ottenute è il seguente:

Figura 5



Il fatto di aver eliminato la spline compresa nell'intervallo 3600 – 28800, implica che lo *spazio di approssimazione* $[3600; 10800]$ è attraversato da 3 splines invece che da $k + 1 = 4$ splines, così come previsto dalla teoria. In realtà, la presenza in quest'intervallo di soli 7 titoli, nonché la grande omogeneità che caratterizza queste emissioni (che rappresentano i cosiddetti titoli di "lunghissimo termine"), permette di avere una buona approssimazione della curva zero-coupon anche con una spline in

meno. È comunque probabile che in futuro, con la presenza di nuove emissioni e/o l'aggiunta di titoli simili, una spline in più sia necessaria e che quindi la quarta spline che in precedenza abbiamo eliminato, diventi statisticamente significativa.

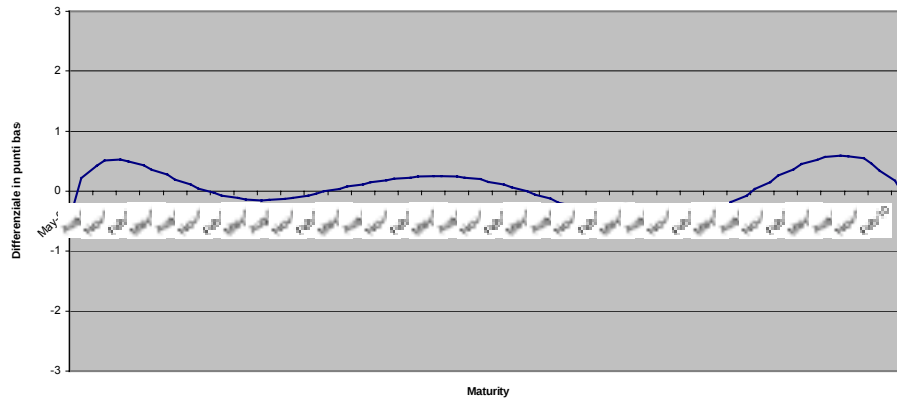
Per quanto riguarda la *differenza fra prezzi teorici e prezzi di mercato*, per i titoli fino a 10 anni analogamente a quanto visto nel 1° campione, tale valore non è mai superiore allo 0,18 % del prezzo di mercato, e mediamente è pari allo 0,07 %; per i titoli con scadenza superiore a 10 anni, tale discrepanza è pari mediamente allo 0,30 %, e non supera mai lo 0,60 %. Tuttavia, poiché l'errore standard dell'ultima spline è pari al 4%, le indicazioni per la rich-cheap analysis nella parte terminale della curva vanno prese con una certa cautela.

Si presentano di seguito i risultati del RMSE (Root Mean Square Error) relativi ai prezzi ed ai rendimenti:

	RENDIMENTI (b.p.)		PREZZI (centesimi)	
Totale	RMSE	4.15	RMSE	13.27
(titoli fino a 10 anni)	RMSE	4.33	RMSE	7.62
(titoli oltre 10 anni)	RMSE	2.47	RMSE	32.18

Per rigore di analisi, si è infine deciso di confrontare i tassi zero-coupon calcolati fino a 10 anni ottenuti con il primo campione, con quelli ricavati con il secondo campione in cui sono inclusi i titoli ventennali e trentennali. Il differenziale in punti base fra i due tassi è stato il seguente:

Figura 6 – DIFFERENZA FRA I TASSI ZERO COUPON CALCOLATI SOLO CON I TITOLI FINO A 10 ANNI E QUELLI OTTENUTI UTILIZZANDO ANCHE I TITOLI VENTENNALI E TRENTENNALI



Come si vede la differenza non è mai superiore ad 1 punto base, il che ci conferma l'idea che il **trentennale** permetta di migliorare la stima nella parte iniziale dello spazio di approssimazione, svolgendo l'importante ruolo di “**stabilizzatore**” della curva dei tassi.

3. L'UTILIZZO DELLE B-SPLINE NELLA STIMA CONGIUNTA DEI “CREDIT SPREAD” E DELLA STRUTTURA A TERMINE DEI TASSI RISK-FREE

Tradizionalmente la curva degli spread è calcolata sottraendo la struttura a termine dei tassi risk-free calcolata utilizzando i titoli di stato, dalla struttura a termine ottenuta con i titoli corporate, entrambe calcolate in modo indipendente l'una dall'altra. In questo modo ogni minima disuguaglianza presente nella curvatura di queste due curve determina delle forti oscillazioni nella curva dello spread, contraddicendo in questo modo i principali modelli teorici di evoluzione stocastica degli *spread*¹⁰.

¹⁰ Si veda su tutti Jarrow, Lando e Turnbull (1997), *op. cit.*

Un nuovo modello introdotto recentemente e denominato “Multi-Curve” introduce la stima congiunta delle strutture a termine e degli spread: la stima si basa infatti sulla scomposizione della struttura a termine rischiosa in una curva risk-free e in una curva relativa allo spread.

Tutti i parametri del modello, dalla curva governativa risk-free alla curva dello spread, sono stimati congiuntamente utilizzando un insieme congiunto di titoli ed in questo modo il modello risulta sicuramente parsimonioso: paragonato all'approccio tradizionale, un numero minore di parametri viene stimato con un insieme di titoli molto più grande.

La struttura proposta per la stima congiunta delle curve di sconto è la seguente:

$$D_1(t) = d(t) \quad (3.1)$$

$$D_c(t) = d(t) + s_c(t) \quad , \quad c = 2, 3, \dots, C,$$

dove $D_1(t)$ rappresenta la curva di sconto per la classe di rating c , $d(t)$ è il modello per la curva di sconto governativa risk-free e $s_c(t)$ è la curva di sconto dello spread, relativo alla classe c rispetto alla curva government.

Al fine di modellare $d(t)$ e $s_c(t)$, vengono usate le funzioni B-spline: come già detto in precedenza, il loro principale vantaggio è la loro flessibilità, poiché non c'è alcun bisogno di imporre a priori una particolare curvatura, in quanto la forma della curva è determinata dai dati. Anche in questo caso quindi, lo spazio di approssimazione $[a, b]$ viene diviso in n intervalli $[t_0, t_1], \dots, [t_{n-1}, t_n]$, dove i nodi t_i sono scelti in modo tale che $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. I dati compresi in ogni intervallo sono poi modellati come una polinomiale di k° grado.

Come si è visto, un modo semplice per calcolare una B-spline è quello che fa ricorso alle funzioni base. Una funzione spline $s(t)$ con n nodi può essere espressa come una combinazione lineare di $n + k$ funzioni base $f(t)$, dove i pesi α sono stimati utilizzando i dati a nostra disposizione, nel caso specifico i prezzi dei titoli:

$$S(t) = \sum_{s=1}^{n+k} \alpha_s f_s(t) = f(t)' \alpha$$

$$(1 \times n+k) (n+k \times 1)$$

Facendo uso delle B-splines, le espressioni (3.1) che modellano la curva di sconto governativa e lo spread divengono quindi le seguenti:

$$(3.2a) \quad D_1(t) = g_1(t)' \beta_1$$

$$(1 \times n_1+k_1) (n_1+k_1 \times 1)$$

$$(3.2b) \quad D_c(t) = g_1(t)' \beta_1 + g_c(t)' \beta_c, \quad c = 2, 3, \dots, C,$$

$$(1 \times n_1+k_1) (n_1+k_1 \times 1) (1 \times n_c+k_c) (n_c+k_c \times 1)$$

dove $g_i(t)$ contiene $n_i + k_i$ funzioni base di B-spline di grado k° e nodi n_i . Per stimare i pesi $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_C$ il modello usa un insieme di dati composto da B_c bonds di categoria c , e l'equazione dei flussi di cassa scontati (DCF) per unire i prezzi dei titoli alla curva di sconto.

L'equazione DCF esprime il prezzo teorico del titolo b -esimo di classe c , come la somma dei flussi di cassa scontati, dove $P_{DCF,cb}$ è il prezzo teorico del titolo, N_{cb} è il numero dei flussi di cassa e Cf_{cbi} è l' i -esimo flusso di cassa che viene pagato al

$$P_{DCFcb} = \sum_{i=1}^{N_{cb}} CF_{cbi} D_c(t_{cbi}), \quad (3.3)$$

tempo t_{cbi} . Anche in questo caso quindi come in precedenza, sono stati considerati solo titoli a reddito fisso privi di elementi opzionali.

Per la categoria 1 (i titoli governativi), sostituendo l'espressione (3.2a) nella (3.3), e raggruppando le variabili conosciute si ottiene

$$\begin{aligned}
P_{DCF,1b} &= \sum_{i=1}^{N_{1b}} CF_{1bi} \left(\sum_{s=1}^{n_1+k_1} \beta_{1s} g_{1s}(t_{1bi}) \right) = \\
&= \sum_{s=1}^{n_1+k_1} \beta_{1s} \left(\sum_{i=1}^{N_{1b}} CF_{1bi} g_{1s}(t_{1bi}) \right) = \\
&= \sum_{s=1}^{n_1+k_1} x_{1bs} \beta_{1s}
\end{aligned}$$

$$P_{DCF,1b} = \mathbf{x}'_{1b} \boldsymbol{\beta}_1 \quad (3.4a)$$

$$(1 \times n_1+k_1) (n_1+k_1 \times 1)$$

mentre per le categorie 2, 3, ..., C sostituendo la (3.2b) nella (3.3) si ottiene

$$= \sum_{s=1}^{n_1+k_1} x_{cbs} \beta_{1s} + \sum_{s=1}^{n_c+k_c} y_{cbs} \beta_{cs} =$$

$$P_{DCF,cb} = \mathbf{x}'_{cb} \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{y}'_{cb} \boldsymbol{\beta}_c \quad (3.4b)$$

$$(1 \times n_1+k_1)(n_1+k_1 \times 1) (1 \times n_c+k_c)(n_c+k_c \times 1)$$

Al fine di stimare i coefficienti delle splines, i prezzi teorici $P_{DCF,cb}$ sono sostituiti dai prezzi di mercato P_{cb} . Usando la notazione matriciale, si ottiene il seguente modello di regressione lineare:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ X_2 & Y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_c & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & Y_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_c \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_c \approx I.I.D.(0, \sigma_c^2)$$

dove $\mathbf{X}_c$ è una matrice $(B_c \times (n_1 + k_1))$ con righe $\{\mathbf{x}'_{c1}; \mathbf{x}'_{c2}, \dots, \mathbf{x}'_{cBc}\}$ e $\mathbf{Y}_c$ è una matrice $(B_c \times (n_c + k_c))$ con righe $\{\mathbf{y}'_{c1}; \mathbf{y}'_{c2}; \dots; \mathbf{y}'_{cBc}\}$.

Si accetta che i residui abbiano delle varianze differenti per ogni classe di rating, poiché i prezzi dei titoli con rating minore presentano solitamente dei prezzi più fluttuanti, a causa della minore liquidità e della maggiore incertezza sul loro merito di credito. Tra l'altro, in precedenza si era visto che anche sullo stesso mercato dei Bund i residui risultavano eteroschedastici: a maggior ragione, in questo caso gli errori standard dovranno essere calcolati attraverso una stima HAC.

3.1 Il problema della scelta dei titoli corporate da utilizzare

La decisione di quali titoli corporate scegliere, sia per costruire un indice rappresentativo del mercato, che per un semplice campione di analisi non è mai stata un compito facile. Questa difficoltà è legata al fatto che, a differenza delle azioni, i titoli *corporate* sono prevalentemente trattati su mercati *over the counter*, con tutte le conseguenze che questo fatto comporta, soprattutto in termini di informazione e conoscenza dei volumi trattati. È quindi molto elevato il rischio di selezionare delle emissioni con un volume di contrattazioni molto piccolo, e il cui prezzo risulta perciò poco significativo.

Diverse ricerche in passato hanno messo in evidenza come la fonte dei prezzi prescelta possa influenzare in modo determinante l'informazione ritraibile da un particolare campione di titoli corporate, sia ai fini della *portfolio allocation* ottimale che

per il calcolo del rischio-rendimento di un indice da utilizzare come benchmark del mercato.¹¹

Il problema principale da affrontare è quindi rappresentato dalla liquidità dell'emissione: più un titolo è illiquido, maggiore è la probabilità che il suo prezzo non venga aggiornato (in termine tecnico "run"), maggiore è la frequenza e la dimensione della discrepanza di prezzo fra due diverse fonti di dati.

Il principale studio che ha cercato di analizzare queste problematiche e di offrire una possibile soluzione, è ancor oggi quello di Sarig e Warga (1989).¹²

Al fine di eliminare le emissioni illiquide dai campioni di analisi, i due autori suggeriscono di usare tre *proxies* della liquidità:

- 1) *L'età di un titolo*, vale a dire quanto tempo è passato dal momento dell'emissione. Col passare del tempo, infatti, la frazione del titolo che viene assorbita nei portafogli inattivi degli investitori tende ad aumentare ed una volta che il titolo diviene illiquido, tende a rimanere tale fino alla maturazione. Questo succede, ad esempio, quando un certo bond soddisfa le necessità di diversificazione di un fondo pensione: in questo caso infatti, il fondo compra e porta fuori dalla circolazione una parte dell'offerta totale del titolo emesso. Di conseguenza, la liquidità di un titolo tende a diminuire con il passare del tempo.
- 2) *Il bid-ask spread*. Un operatore che è insicuro sul prezzo corretto da applicare ad un titolo è incline a richiedere un margine maggiore; inoltre un'emissione illiquida è difficile da trovare e consegnare, determinando anche in questo caso uno spread più elevato. Tuttavia, bisogna notare che gli operatori tendono a richiedere degli spread maggiori in periodi di alta volatilità, in quanto l'incertezza

¹¹ Si veda su tutti, "Corporate bond price data sources and return/risk measurement" di Nunn, Hill e Schneeweis, *Journal of financial and quantitative analysis*, n.2 June 1986.

¹² "Bond price data and bond market liquidity", *Journal of financial and quantitative analysis* (Settembre – 1989)

sui titoli illiquidi è più grande. Filtrare i titoli in base al bid-ask spread, può quindi dare risultati diversi a seconda che ci trovi in periodi di bassa o alta volatilità.

- 3) *L'ammontare dell'emissione*. Questa proxy è basata sulla potenziale correlazione fra stock esistente in circolazione e volume degli scambi su quel titolo.

Tutti e tre questi particolari “filtri” permettono di eliminare buona parte delle emissioni illiquide e la preferenza per l'uno o per l'altro dipende dall'utilizzo che si vuole fare dei titoli. Poiché nel nostro caso l'obiettivo è quello di costruire una curva del credit spread robusta e significativa e non riprodurre un particolare indice obbligazionario ai fini della portfolio allocation (nel qual caso gli autori consigliano la sola proxy relativa all'età del titolo), si farà riferimento all'outstanding emesso (500 milioni di euro) e all'età dei titoli in circolazione (term to maturity non inferiore ad 1 anno e con meno di tre anni dalla data di emissione).

3.2 Dati scelti e modellizzazione

I titoli considerati nell'analisi sono stati presi da due fonti:

- 1) Merrill Lynch EMU Financial Index;
- 2) Selezionati attraverso una ricerca effettuata con Reuters 3000 Fixed Income.

Al fine di garantire una fonte comune di dati e per avere un'ulteriore garanzia di liquidità, sono stati scelti solo i titoli i cui prezzi sono forniti dal market contributor “Reuters Composite”: in questo caso, infatti, i prezzi sono forniti giornalmente in real time sia su Reuters 3000 Fixed Income che su Reuters Terminal. Inoltre, Reuters 3000 permette di consultare (ed eventualmente scaricare su Excel) le quotazioni Bid / Ask del titolo dal momento dell'emissione fino ad oggi, potendo quindi verificare che su quel titolo ci siano stati degli scambi: come si è detto in precedenza, il fatto che la quotazione del titolo sia rimasta immutata per diversi giorni se non per settimane, è un sicuro indizio di illiquidità.

I prezzi dei titoli utilizzati per l'analisi sono stati presi il 4 dicembre alle 17.30 a mercato chiuso, ma anche in questo caso come in precedenza, l'analisi può essere svolta in ambito infragiornaliero.

Per quanto detto nel paragrafo precedente, sono stati esclusi tutti i titoli corporate con *term-to-maturity inferiore ad 1 anno e outstanding inferiore a 500 milioni di euro*. Poiché lo scopo di questo lavoro è la stima dello spread nell'ambito dei "financial services", i titoli presi in considerazione appartengono tutti al comparto bancario e finanziario; sono stati *emessi in Euro o in una valuta di area Euro*, preferibilmente *in data non anteriore all'1/1/1997*, per evitare i problemi di liquidità legati all'età dei corporate bonds¹³; allo stesso modo *il domicilio degli emittenti è collocato in un paese dell'area Euro*.

Le classi di rating analizzate sono state le seguenti:

- a) AAA;
- b) AA (da AA- a AA+);
- c) A (da A- a A+)

Con riferimento ai titoli con rating A, a causa del minore numero di società quotate e dell'ammontare mediamente minore delle emissioni, sono state introdotte due eccezioni ai criteri di selezione sopra esposti:

- 1) sono state considerati anche titoli di emittenti con domicilio in Gran Bretagna, sempre però emessi in Euro;
- 2) per i titoli con maturity superiore ai 10 anni, sono stati considerati anche emissioni con outstanding inferiore a 500 milioni, ma in ogni caso superiori a 100 milioni di euro.

¹³ Le eccezioni a questa regola si riferiscono solo a grandissime emissioni di particolare importanza e incrementate nel tempo, come quelle della Deutsche Finance NV.

Poiché il numero di titoli con scadenza superiore al 2014 è limitato, si è deciso di calcolare la curva dei credit spread per tutte e tre le classi di rating solo fino al 01 / 01 / 2014.

Con riferimento al posizionamento dei nodi ed alla scelta del grado della funzione spline da usare, la considerazione che la curva del credit spread presenta una forma meno complicata della struttura a termine dei tassi risk-free, ci ha portato a ridurre la flessibilità delle spline usate per lo spread, attraverso la riduzione del loro grado (e quindi anche dei gradi di libertà). Si è così deciso di utilizzare una spline quadratica invece che cubica ed i nodi utilizzati sono in numero inferiore (7) rispetto a quelli usati nel caso della sola curva risk-free.

Quando si procede a stimare gli spread, poiché non vengono prese in considerazione tutte le emissioni con term to maturity inferiore ad 1 anno, succede spesso che la parte iniziale dello spread (anno 0 – 1) presenti delle oscillazioni irrealistiche, in particolar modo con riferimento alle classi di rating più elevato (AAA o AA). Questo risultato è causato dalle ridotte dimensioni dello spread di queste classi di rating rispetto ai tassi di interesse: in questo caso è infatti sufficiente una leggera diversità nella curvatura delle strutture a termine dei tassi risk-free e corporate per ottenere delle oscillazioni nella curva dello spread.

Una possibile soluzione a questo problema è quella di introdurre quattro titoli zero coupon sintetici, i cui prezzi corrispondono ai tassi interbancari EURIBOR a 1, 3, 6 mesi e ad 1 anno: poiché però la maggior parte delle banche commerciali ha un rating AA, questi tassi d'interesse non sono direttamente applicabili alle altre classi di *rating*., ma vanno aggiustati aggiungendo o sottraendo uno spread dipendente dalla categoria di merito creditizio. Il prezzo P_{ct} di un titolo sintetico della classe c di maturity t viene quindi così espresso:

$$P_{ct} = \frac{1}{(1 + \text{EURIBOR}_t + \text{correction}_c)},$$

mentre la correzione proposta per i diversi rating è la seguente,

GOVT:	- 20 b.p.
AAA:	- 10 b.p.
AA:	0 b.p.
A:	+ 10 b.p.

In merito a questa soluzione si avanzano però alcuni dubbi:

- 1) se è vero che la maggior parte delle banche commerciali ha rating AA, la presenza di istituti finanziari con rating diverso rende i tassi interbancari EURIBOR degli indici grezzi, che non rappresentano perfettamente la curva a breve AA;
- 2) l'entità della correzione è un elemento soggettivo, che tra l'altro presume una differenza di spread fra classi di merito costante (mentre nella realtà cambia ogni giorno).
- 3) Come si vedrà nel prossimo paragrafo, considerare nel modello anche i Bund trentennali e i titoli corporate con scadenza superiore ai 10 anni, permette in buona parte di superare i problemi sopra evidenziati.

Nonostante queste perplessità, si deve tuttavia riconoscere che una soluzione alternativa migliore non è proponibile e che **la presenza di questi titoli sintetici permette di migliorare notevolmente la robustezza dei coefficienti delle *spline* iniziali, riducendone gli S.E.**

I 42 titoli corporate AAA (+ i 4 titoli sintetici) considerati sono i seguenti:

REUTERS RIC	TITOLO	MATURITY	CEDOLA
	EURIBOR AAA 1 MESI	03-gen-01	
	EURIBOR AAA 3 MESI	04-mar-01	
	EURIBOR AAA 6 MESI	02-giu-01	
	EURIBOR AAA 12 MESI	29-nov-01	
FR049927=	DEXIA MUNICIPAL AGENCY	13-mar-02	4.625
AT008159777=	OESTERREICHISCHE POSTSPARKASSE	11-nov-02	5.250
DE007268424=	DSL FINANCE	05-dic-02	5.125
DE008394075=	DSL FINANCE	04-feb-03	4.500
NL008616736=	RABOBANK NEDERLAND	05-mag-03	4.500
DE243351=	DSL BANK	17-giu-04	3.500
DE215826=	MUENCHENER HYPO	01-lug-04	5.000
NL009569006=	RABOBANK NEDERLAND	12-lug-04	3.625
NL010251435=	RABOBANK NEDERLAND	13-ott-04	4.750
DE226453=	DEXIA HYPOTHEKENBANK AG	24-gen-05	4.750
FR049742=	DEXIA MUNICIPAL AGENCY	26-apr-05	5.000
AT005909651=	OESTERREICHISCHE KONTROLLBANK	08-ago-05	7.000
DE335656=	NUERNBERGER HYPO	23-gen-06	6.000
DE202783=	ALLGEMEINE HYPO	01-feb-06	5.250
AT006347983=	OESTERREICHISCHE KONTROLLBANK	21-feb-06	6.375
DE009614273=	DSL BANK	20-apr-06	3.875
FR049979=	DEXIA MUNICIPAL AGENCY	26-apr-07	5.375
DE007857527=	ALLIANZ INTERNATIONAL FINANCE	30-lug-07	5.750
DE007901330=	DSL BANK	13-ago-07	5.625
AT008007594=	OESTERREICHISCHE KONTROLLBANK	12-set-07	5.750
DE222008=	BAYERISCHE HYPO UND VEREINS	15-gen-08	5.500
DE307505=	WESTDEUTSCHE LANDESBANK	08-feb-08	5.250
AT008371822=	OESTERREICHISCHE KONTROLLB.	25-apr-08	5.250
DE232115=	DEUTSCHE GENOSSENSCHAFTS-HYPO	19-giu-08	4.750
DE276476=	KREDITANSTALT FUER WIEDERAUFBAU	01-set-08	5.625
DE308150=	BFG HYPOTHEKENBANK	06-nov-08	5.000
DE276078=	KREDITANSTALT FUER WIEDERAUFBAU	04-gen-09	5.000

REUTERS RIC	TITOLO	MATURITY	CEDOLA
DE009695729=	LANDWIRTSCHAFTLICHE R.BANK	30-apr-09	4.125
DE350904=	DEUTSCHE GENOSSENSCHAFTS-HYPO	13-ago-09	5.250
DE236652=	DEUTSCHE GENOSSENSCHAFTS-HYPO	01-apr-10	5.500
FR018656=	CRH	25-apr-10	5.750
DE102381=	LANDESBANK BADEN-WUERTTEMBERG	06-lug-10	5.500
DE276080=	KREDITANSTALT FUER WIEDERAUFBAU	11-ago-10	4.750
NL011024513=	BNG	25-ott-10	5.625
DE215860=	MUENCHENER HYPO	19-apr-11	4.250
FR018624=	CAISSE DE REFINANCEMENT HYPO.	25-apr-11	4.200
DE253795=	DEUTSCHE HYPO	14-feb-12	6.000
DE315955=	RHEINBODEN HYPOTHEKENBANK	24-ago-12	5.000
DE247536=	DEPFA DEUTSCHE PFANDBRIEF.	15-gen-13	5.500
NL008742685=	BNG	05-giu-13	5.375
DE276079=	KREDITANSTALT FUER WIEDERAUFBAU	17-giu-13	5.125
NL009515119=	BNG	10-mar-14	4.500

I 37 titoli AA (+ i 4 titoli sintetici) sono i seguenti:

REUTERS RIC	TITOLO	MATURITY	CEDOLA
	EURIBOR AA 1 MESI	03-gen-01	
	EURIBOR AA 3 MESI	04-mar-01	
	EURIBOR AA 6 MESI	02-giu-01	
	EURIBOR AA 12 MESI	29-nov-01	
FR007178018=	CREDIT LOCAL DE FRANCE	10-gen-02	6.750
DE007254482=	DEUTSCHE BANK FINANCE NV	21-gen-02	4.875
DE005706297=	DEUTSCHE BANK FINANCE NV	15-mag-02	7.000
DE007910762=	DRESDNER BANK	02-set-02	6.000
DE006948782=	BAYERISCHE HYPO	10-ott-02	5.875
FR004580095=	BNP	29-set-03	6.500
DE008159351=	BAYERISCHE HYPO	20-nov-03	5.375

REUTERS RIC	TITOLO	MATURITY	CEDOLA
AT009658815=	BANK AUSTRIA	23-apr-04	3.500
DE009682279=	DEUTSCHE FINANCE (NETHERL.)	28-apr-04	3.500
NL009892974=	ING BANK	06-lug-04	4.000
FR009520805=	CREDIT LOCAL DE FRANCE	12-lug-04	3.625
DE008720223=	DEUTSCHE FINANCE (NETHERL.)	19-mag-05	5.000
DE008745544=	DRESDNER FINANCE BV	25-mag-05	5.000
DE202771=	ALLGEMEINE HYPO	03-gen-06	6.250
FR019754=	CREDIT LOCAL DE FRANCE	24-gen-06	6.700
DE009360425=	DRESDNER FINANCE BV	17-mar-06	5.000
DE009382038=	DRESDNER FINANCE BV	19-gen-07	4.000
NL011461492=	ING GROEP NV	01-ago-07	6.000
DE259986=	DEUTSCHE HYPOTHEKENBANK	21-set-07	5.250
FR008416095=	CREDIT LOCAL DE FRANCE	25-apr-08	5.250
DE008718431=	DRESDNER FINANCE BV	04-gen-09	5.250
DE008664501=	DEUTSCHE FINANCE (NETHERL.)	04-gen-09	5.000
NL009400192=	ING BANK	29-gen-09	4.250
FR009038914=	CREDIT LOCAL DE FRANCE	25-apr-09	4.750
IT009759620=	INA	28-mag-09	4.500
NL009874518=	ABN AMRO BANK	24-giu-09	4.750
DE009382119=	DEUTSCHE FINANCE (NETHERL.)	28-lug-09	4.250
DE009465669=	COMMERZBANK AG	25-ott-09	4.250
DE011219314=	DEUTSCHE BAHN FINANCE	15-giu-10	6.000
DE010716098=	COMMERZBANK AG	25-ott-10	6.125
DE100703=	LANDESBANK RHEINLAND	14-gen-11	5.750
FR007907010=	CREDIT LOCAL DE FRANCE	20-ago-12	5.750
DE009360018=	DEUTSCHE FINANCE (NETHERL.)	20-ago-13	5.125
DE229459=	DEPFA DEUTSCHE PFANDBR.	15-gen-14	4.500
DE202797=	ALLGEMEINE HYPO	20-gen-14	4.250
IT009724524=	GENERALI FINANCE	12-mag-14	4.750

I 29 titoli A (+ i 4 titoli sintetici) sono i seguenti:

REUTERS RIC	TITOLO	MATURITY	CEDOLA
	EURIBOR A 1 MESI	03-gen-01	
	EURIBOR A 3 MESI	04-mar-01	
	EURIBOR A 6 MESI	02-giu-01	
	EURIBOR A 12 MESI	29-nov-01	
DE007277172=	BAYERISCHE HYPO UND VEREINSB.	04-feb-02	6.750
FR004875729=	CCCI	21-feb-02	6.000
AT007416199=	RAIFFEISEN ZENTRALBANK	27-mar-03	4.875
DE004287495=	DRESDNER BANK	01-apr-03	6.750
DE010676304=	BAYERISCHE HYPO UND VEREINSB.	02-feb-04	5.250
NL010167230=	SNS BANK NEDERLAND	21-set-04	4.750
DE011381871=	BAYERISCHE HYPO UND VEREINSB.	12-lug-05	5.500
FR004773519=	CETEM	03-gen-06	6.750
ES010360943=	INTERNATIONAL ENDESA	08-nov-06	5.750
DE011247636=	LINDE FINANCE	14-giu-07	6.375
NL008052000=	ING BANK	01-ott-07	6.000
NL008091765=	SNS BANK NEDERLAND	15-ott-07	5.875
GB008881014=	LLOYDS BANK PLC	14-lug-08	5.250
GB008905487=	ROYAL BANK OF SCOTLAND	22-lug-08	5.250
NL009470743=	ING BANK	23-feb-09	4.625
NL009632492=	FORTIS FINANCE NV	07-apr-09	4.625
ES009894420=	BSCH ISSUANCE	06-lug-09	5.125
DE010174228=	BAYERISCHE HYPO UND VEREINSB.	15-gen-10	5.625
IE010751519=	BANK OF IRELAND	10-feb-10	6.450
FR010741521=	CCCI	26-apr-10	6.250
ES010857678=	BSCH ISSUANCE	05-lug-10	6.375
DE011386385=	COMMERZBANK	12-lug-10	6.500
FR009683330=	CCCI	25-apr-11	4.500

REUTERS RIC	TITOLO	MATURITY	CEDOLA
GB009902635=	NATWEST BANK	30-giu-11	5.125
GB009909958=	WOOLWICH PLC	08-lug-11	5.250
FR018709=	BNP PARIBAS *	30-ott-12	5.800
FR018712=	SOCIETE GENERALE *	05-nov-12	5.650
AT008930376=	KOMMUNALKREDIT AUSTRIA	29-lug-13	5.250
FR011067395=	SOCIETE GENERALE	27-apr-15	6.625

* Le quotazioni di questi due titoli emessi recentemente (9 e 16 ottobre) sono al momento disponibili solo su Reuters 3000 Fixed Income, mentre il collegamento con R. Terminal non è ancora possibile (sebbene vi siano già i relativi RIC). Al momento è in corso un'indagine interna Reuters per vedere se è possibile risolvere il problema.

3.3 Risultati

Una volta scelti i titoli, il passo successivo è stato quello di implementare il modello, cercando i valori dei nodi che minimizzassero gli standard error, ed i RMSE dei prezzi e dei rendimenti.

Come già anticipato in precedenza, nell'analisi svolta sono stati considerati anche i Bund ventennali e trentennali ed i titoli corporate con scadenza superiore ai 10 anni, in quanto permettono un notevole miglioramento della robustezza delle stime e aiutano a risolvere il problema delle oscillazioni dello spread nella parte iniziale della curva.

Per quanto riguarda la parte risk-free, sono stati considerati i nodi ottenuti nella precedente analisi svolta nel paragrafo 2.5.2, mentre per la parte relativa allo spread, lo spazio di approssimazione è stato suddiviso in due segmenti, da 0 a 8 / 8,5 anni, e superiore a 8 / 8.5 anni (le piccole differenze fra le diverse classe di rating sono dovute al diverso posizionamento temporale dei corporate bonds al loro interno). Poiché le splines utilizzate sono quadratiche, ogni intervallo in cui è diviso lo spazio di approssimazione è attraversato da $k + 1 = 3$ funzioni base.

Il modello finale ottenuto è stato il seguente:

GOVERNMENT		
	<i>Start</i>	<i>End</i>
NODO 1	-2700	900
NODO 2	-1800	1800
NODO 3	-900	2700
NODO 4		3600
NODO 5	900	4500
NODO 6	1800	10800
NODO 7	2700	18900
NODO 8	(*) 3600	28800
NODO 9	4500	40500
NODO 10	10800	
NODO 11	18900	
NODO 12	28800	
NODO 13	40500	
SPREAD AAA		
	<i>Start</i>	<i>End</i>
NODO 1	-6200	3100
NODO 2	-3100	6200
NODO 3		6250
NODO 4	3100	6300
NODO 5	6200	
NODO 6	6250	
NODO 7	6300	

(*) Anche in questo caso l'ottava spline è risultata non significativa e quindi nella regressione non è stata considerata

SPREAD AA		
	<i>Start</i>	<i>End</i>
NODO 1	-5800	2900
NODO 2	-2900	5800
NODO 3		5850
NODO 4	2900	5900
NODO 5	5800	
NODO 6	5850	
NODO 7	5900	
SPREAD A		
	<i>Start</i>	<i>End</i>
NODO 1	-6200	3100
NODO 2	-3100	6200
NODO 3		6250
NODO 4	3100	6300
NODO 5	6200	
NODO 6	6250	
NODO 7	6300	

I coefficienti delle spline e relativi errori standard sono i seguenti:

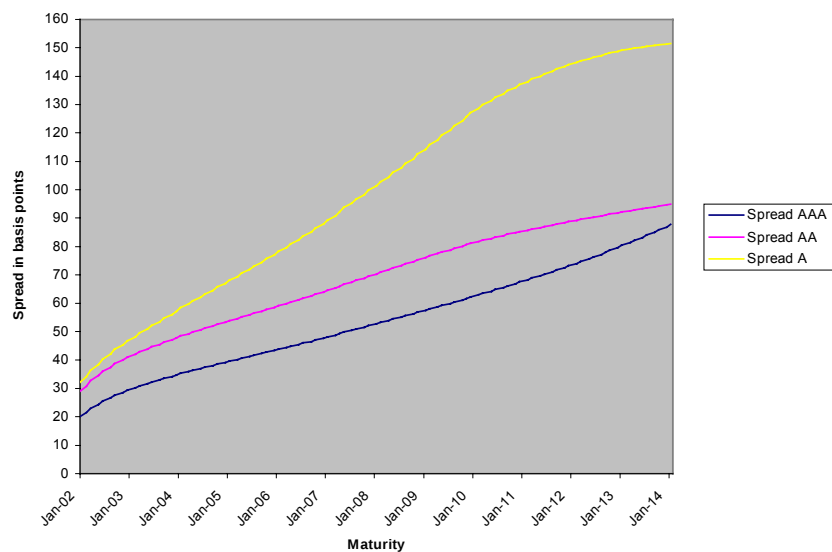
Coefficienti		Std. Error (HAC)	P-value (*)
GOVT	4036.759	33.75947	0.0000
	3588.134	7.368054	0.0000
	3195.697	4.760253	0.0000
	2854.625	6.391608	0.0000
	2502.568	7.646911	0.0000
	5583.374	27.81325	0.0000
	6593.466	74.87549	0.0000
	28259.29	1747.638	0.0000
AAA	135.2995	39.87661	0.0007
	-107.7152	23.11948	0.0000
	-315.2385	32.3763	0.0000
	-248.2797	46.52235	0.0000
AA	165.3452	46.25029	0.0004
	-131.6758	26.53169	0.0000
	-350.6801	31.92176	0.0000
	-189.4796	60.78603	0.0018
A	177.8747	79.2485	0.0249
	-145.0838	49.55182	0.0034
	-663.2353	64.24946	0.0000
	-267.3227	85.53009	0.0018

(*) Sebbene non siamo nella condizione di poter introdurre l'ipotesi di normalità dei residui, la dimensione molto piccola degli standar error rispetto ai coefficienti (in ogni caso inferiore al 44 %), ci permette di considerare quest'ultimi dei valori significativi.

Come era prevedibile le spline degli spread meno robuste sono quella iniziale e quella finale (per gli stessi motivi visti per la parte risk-free), mentre fra classi di rating com'era ovvio la migliore è quella AAA mentre la peggiore è la A.

Il grafico degli *spread* alla fine ottenuti è il seguente:

Figura 7 – SPREAD AAA – AA - A



mentre i *Root Mean Squared Error* (RMSE) fra rendimenti a scadenza teorici e di mercato e fra prezzi teorici e prezzi di mercato, sono i seguenti:

RENDIMENTI (b.p.)			PREZZI (centesimi)		
RMSE	6.30	AAA	RMSE	37.41	AAA
RMSE	9.01	AA	RMSE	59.71	AA
RMSE	17.57	A	RMSE	118.20	A

In realtà, il modello *multi curve* generale appena visto, che stima le curve degli *spread* di tutte le classi di rating *insieme*, non è la soluzione che permette di

minimizzare gli errori standard. La ragione di ciò è abbastanza immediata: ad esempio, calcolare lo spread AAA considerando anche i titoli AA e A, include nella stima delle fonti di variabilità che sono estranee a quella classe di rating (allo stesso modo per cui la migliore curva risk-free la si ottiene considerando solamente Bund o titoli sovrani similari). Questo discorso è valido in parte anche con riferimento allo spread AA, mentre com'è facile intuire non vale per i titoli con rating A.

Quello che qui si vuole dire è che quando si è interessati a calcolare lo *spread* relativo ad una particolare classe di rating, *al fine di ottenere le stime più robuste possibili bisogna considerare solo titoli con rating uguale o superiore a quello considerato.*

A questo riguardo si presentano di seguito gli standard error, espressi in % sul relativo coefficiente, delle 8 splines utilizzate per calcolare la curva risk-free e delle 4 impiegate per valutare lo spread a cui si è interessati, sia per il modello multi curve generale che per quelli che considerano solo titoli di rating uguale o superiore, nel nostro caso Bund – AAA e Bund -AAA - AA.

Nel primo caso oggetto di interesse sono i coefficienti delle spline utilizzate per lo spread AAA (oltre ovviamente ai coefficienti risk-free), mentre nel secondo caso si osservano quelli relativi allo spread AA.

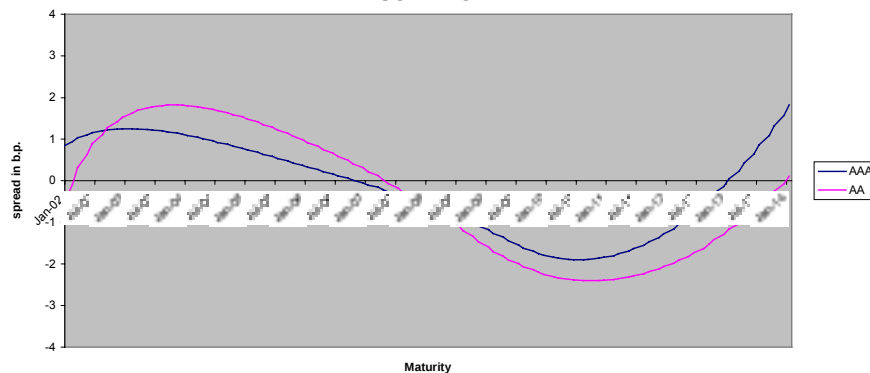
<i>MULTI CURVE GENERALE</i>	<i>MULTI CURVE AAA</i>
0.84	0.63
0.21	0.16
0.15	0.10
0.22	0.14
0.31	0.22
0.50	0.32
1.14	0.96
6.18	5.96
AAA 29.47	20.29
21.46	16.00
10.27	6.68
18.74	19.71

<i>MULTI CURVE GENERALE</i>	<i>MULTI CURVE AAA - AA</i>
0.84	0.64
0.21	0.18
0.15	0.13
0.22	0.17
0.31	0.26
0.50	0.35
1.14	0.98
6.18	6.00
AA 27.97	27.86
20.15	19.52
9.10	7.29
32.08	34.29

In tutti i casi, ad eccezione dell'ultima *spline* (dove comunque la differenza è minima), gli errori standard risultano minori, confermando quindi la validità della nostra osservazione.

Confrontando invece gli spread ottenuti nell'uno e nell'altro caso, per la classe di rating AAA e per quella AA, si ottengono le seguenti differenze:

Figura 8 – DIFFERENZIALE FRA GLI SPREAD CALCOLATI CON IL MULTI CURVE GENERALE E QUELLI COMPRENDENTI SOLO TITOLI DI RATING UGUALE O SUPERIORE



La differenza nei due casi non è quasi mai superiore ai 2 punti base e mediamente è pari ad uno: utilizzare il modello generale invece di quelli ottimizzati con titoli di rating uguale o superiore, non comporta quindi un grosso errore di valutazione. Inoltre, quando si devono valutare titoli a lunga scadenza è forse preferibile impiegare quello generale, in quanto, come si è visto, nelle spline finali presenta degli errori standard leggermente migliori: questo risultato probabilmente è dovuto al fatto che i titoli corporate appartenenti al comparto del lungo termine presentano problemi di valutazione e di liquidità che tendono ad essere simili fra le diverse classi di rating. Di conseguenza, in questo caso la stima congiunta con più titoli, anche di rating inferiore, permette di migliorare la robustezza dei coefficienti delle spline finali.

Questo discorso ha ovviamente un limite, in quanto in questo lavoro sono stati considerati solo “*investment grade*” *bond*: è molto probabile che considerando anche “*high yield bonds*” la stima peggiori notevolmente anche per le *spline* finali.

4. CONCLUSIONI

Scopo di questo lavoro è stato quello di presentare i vantaggi della metodologia rappresentata dalle funzioni *B-spline* nella stima di strutture a termine di titoli *governmen*i, *corporate*, ed in particolare di *credit spread*, al fine di ottenere una effettiva relazione, stabile nel tempo e regolare funzionalmente per la valutazione del merito di credito di un ente emittente un prestito obbligazionario privato.

Le metodologie alternative di stima discreta, come ad esempio il *bootstrap*, ai fini del calcolo delle strutture a termine sono talvolta impedita dalla presenza di un numero maggiore di *payment dates* rispetto al numero dei *bond* considerati, come delineato nel secondo capitolo.

La conseguente necessità di metodi con funzioni di approssimazione lineare della funzione di sconto continua rappresenta pertanto un significativo progresso rispetto al passato, ma con le dovute cautele. L'utilizzo di certe funzioni base può infatti generare una matrice dei regressori con collinearità quasi perfetta determinando errori nel calcolo.

Una soluzione a questi problemi è rappresentata dalle **funzioni *B-spline***, funzioni base strettamente positive solo su di una porzione del dominio ed identicamente nulle altrove, eludono il problema della multicollinearità possedendo inoltre proprietà di convergenza. La sensibilità dei risultati di stima al posizionamento dei nodi, può essere in parte superato in un contesto di analisi *rich-cheap*.

L'applicazione al mercato tedesco dei titoli di stato *bund*, dapprima limitata ai soli titoli con scadenza fino al decennale, contempla nel seguito anche i titoli ventennali e i trentennali. In tal caso, si è visto come l'ampiezza della distanza fra i nodi nella parte terminale della curva possa aiutare a contenere gli *standard error* anche in presenza di un numero limitato di titoli, permettendoci di lavorare con una curva *zero*-

coupon priva di eccessive oscillazioni o di veri e propri salti di continuità, come riscontrato in precedenza.

L'introduzione del modello **Multi-Curve** nel terzo capitolo consente la **stima congiunta** delle strutture a termine *government*, *corporate* e *credit spread*: la stima si basa infatti sulla scomposizione della struttura a termine rischiosa in una curva *risk-free* ed in una relativa allo *spread*.

Tradizionalmente la curva *spread* è definita dalla differenza tra la struttura a termine dei tassi espressi dai titoli *corporate* e quella ad essa indipendente dei tassi *risk-free* pertinenti ai titoli *government*. In questo modo, tuttavia, ogni minima irregolarità presente nella curvatura di queste due funzioni della scadenza implica forti oscillazioni nella curva dello *spread*, contraddicendo i principali modelli teorici di evoluzione stocastica degli *spread*.

Nel modello *Multi-Curve* invece, i parametri del modello - dalla curva governativa *risk-free* alla curva *credit spread* - sono stimati congiuntamente utilizzando l'insieme complessivo dei titoli, tale dunque da rendere la stima parsimoniosa. Paragonato all'approccio tradizionale, questo modello presenta il vantaggio di ridurre il numero di parametri stimati con un insieme di titoli più ampio.

Nell'applicazione del modello è stato affrontato il delicato tema della selezione dei titoli *corporate* da inserire nel campione. Infatti, la diffusa presenza nel comparto di emissioni poco liquide e quindi poco significative per i nostri fini ha richiesto al presente lavoro l'eliminazione dal campione di analisi dei titoli meno liquidi. Allo scopo sono state adottate tre *proxie* distinte della liquidità: i) l'età del titolo (vale a dire quanto tempo è passato dalla data dell'emissione), ii) il *bid-ask spread* e iii) l'ammontare dell'emissione (e relazione esistente fra *stock* in circolazione e volume degli scambi su quel titolo).

L'obiettivo di costruire una curva dei *credit spread* robusta e significativa è stato perseguito senza riprodurre uno specifico indice obbligazionario ai fini della *portfolio allocation* - nel qual caso sarebbe stato preferibile utilizzare la sola *proxy* relativa

all'età del titolo - facendo riferimento invece ai valori di *outstanding* emesso per ciascun prestito e al *term to maturity* dei titoli in circolazione.

I risultati del lavoro svolto con le precauzioni ed i criteri sopra indicati sono stati pertanto in linea con le nostre attese perché i coefficienti delle funzioni *spline* ottenute sono altamente significativi e le conseguenti **curve spread prive di oscillazioni e irregolarità** funzionali, quindi conformi ai modelli teorici di calcolo stocastico.

Si è inoltre provato che quando si è interessati a calcolare lo *spread* relativo ad una particolare classe di *rating*, al fine di ottenere stime robuste è preferibile considerare solo titoli con *rating* uguale o superiore, sebbene l'aggiunta di titoli con *rating* inferiore non determina un errore di stima particolarmente grande nell'ambito delle obbligazioni di tipo *investment grade*.

La robustezza e la stabilità delle stime ottenibili con i modelli trattati nel presente lavoro rende questi strumenti estremamente interessanti per la misura del rischio di credito di titoli obbligazionari privati, mediante *credit spread* funzioni del tempo e della loro scadenza. Per questo motivo il presente lavoro si propone come autentico **building block** da inserire nell'ambito della più complessiva valutazione dei titoli obbligazionari in cui il rischio di credito è spiegato e determinato dal nostro modello in relazione al *rating* d'agenzia espresso sul merito creditizio dell'ente emittente.

BIBLIOGRAFIA

- Anderson, Breedon, Deacon, Derry e Murphy (1996): "Estimating and interpreting the yield curve", J. Wiley & Sons
- Bernini E. (2001): "Obbligazioni Indicizzate ad Organismi di Investimento Collettivo del Risparmio (OICR)", Capital Markets Notes 04/01 – IntesaBci.
- Bevan e Garzarelli (1999): "Corporate bond spread and the business cycle: Introducing GS SPREAD", Goldman Sachs - Global economic paper n. 35.
- Breadley, Myers e Sandri (1999): "Principi di Finanza Aziendale", McGraw Hill (Brealey R.A. and Myers S.C., "Principles of Corporate Finance" 5th Ed.)
- Dotsey (1998): "Interest rate term spread for future economic growth", Federeal Reserve Bank of Richmond *Economic Quarterly*, vol.84(3).
- Dozio, (1999): "L'utilizzo delle Basis Splines per la Rich-Cheap Analysis", Capital Market Notes n.11/99 – Banca Commerciale Italiana.
- Duffee (1996): "Treasury yields and corporate bond yield spread: an empirical analysis", Federal Reserve Board.
- Duffee (1998): "The relation between treasury yields and corporate bond yield spread", *Journal of Finance*, vol. 8(6).
- Fabozzi (1995) "The handbook of fixed income securities", 5th edition .
- Gertler e Lown (1999): "The information in the high yield bond spread for the business cycle: evidence and some implications", *Oxford review of economic policy*, vol. 15(3).
- Houwelling, Hoek e Kleiberger (1999): "The Joint Estimation of Term Structure and Credit Spread", mimeo.
- Jarrow, Lando e Turnbull (1997): "A Markov model for the term structure od cerdit spread", *Review of financial studies*, vol. 10(2).
- Longstaff e Schwartz (1995): "A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt", *Journal of finance*, vol. 50(3).
- McCulloch (1971): "Measuring the term structure of interest rates", *Journal of Business*, vol.44.

- McCulloch (1975): "The tax-adjust yield curve", *Journal of Finance*, vol.30(3).
- Nunn, Hill e Schneeweis (1986): "Corporate bond price data sources and return/risk measurement", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 21.
- Powell (1981): "Approximation theory and methods", Cambridge University Press.
- Reilly e Wright (1994): "An analysis of high-yield bond benchmarks", *Journal of Fixed Income*.
- Reilly, Kao e Wright (1992): "Alternative Bond market indexes", *Financial Analysts Journal*.
- Rose e Schworm (1980): "Measuring the term structure of prices for Canadian federal debt" (Discussion paper n. 81-08, University of British Columbia, 1980)
- Sarig e Warga (1989): "Bond price data and bond market liquidity", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.
- Schaefer (1973): "On measuring the term structure of interest rates", (Discussion paper n. IFA-2-74, London Business School Institute of Finance and Accounting, 1973).
- Schaefer (1981): "Measuring a tax-specific term structure of interest rates in the market for British government securities", *Economic Journal*, vol. 91.
- Shea (1984): "Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: equilibrium models and spline approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 19(3).
- Shea (1985): "Interest rate term structure estimation with exponential splines: a note", *Journal of Finance*, vol.40(1).
- Steeley (1991): "Estimate the gilt-edged term structure: basis splines and confidence intervals", *Journal of Business Finance and Accounting*, vol.18(4).
- Vasicek e Fong (1982): "Term structure modelling using exponential splines", *Journal of Finance* vol.37(2).

Ultimi studi apparsi nella collana "Ricerche"

- R99-2** F. Pedriali, *Metodi di valutazione delle aziende quotate*, Gennaio 1999
- R99-3** A. Fabbri, *Sistemi finanziari nazionali e grado di competitività delle imprese*, Marzo 1999
- R99-4** A. Fabbri, *Implicazioni della Pecking order theory sul comportamento finanziario delle imprese italiane: un'ipotesi di indagine*, Marzo 1999
- R99-5** A. Fabbri, *Principali implicazioni della pecking order theory: una verifica empirica*, Marzo 1999
- R99-6** F. Addolorato - A. Ancona – S. Giudici – E. Laruccia, *L'utilizzo dell'intelligenza artificiale nei processi di asset allocation*, Maggio 1999
- R99-7** S. Trenti, *La competitività tecnologica dei settori industriali italiani: una analisi empirica*, Luglio 1999
- R99-8** U. Cherubini – G. Della Lunga, *Stress Testing Techniques and Value at-Risk Measures: A Unified Approach*, July 1999
- R99-9** M. Esposito – E. Laruccia, *Exchange Rates Statistical Properties Implied in FX Options*, December 1999
- R99-10** M. Esposito, *Hedge Funds: la loro attività e le proposte di regolamentazione*, Dicembre 1999
- R99-11** G. Femminis – L. Ruggerone, *"Crony Capitalism", Bail-outs and Bank Runs*, December 1999
- R99-12** G. De Felice – M. Esposito – E. Laruccia, *La struttura settoriale del mercato azionario europeo*, Dicembre 1999
- R00-01** E. Laruccia – D. Revoltella, *Banking system stability in developing and transition economies: an analysis of the determinants of moody's bank financial strength rating*, January 2000
- R00-02** V. Lazzari – E. Laruccia, *La misurazione del rischio di credito per un portafoglio di finanziamenti bancari*, Febbraio 2000
- R00-03** M. Ciampolini - Bernd Rohde, *Money market integration: a market perspective*, May 2000
- R00-04** F. Guelpa – S. Trenti, *Human capital and the competitiveness of italian industry*, May 2000
- R00-05** A. Jamaleh, *Explaining and forecasting the euro/dollar exchange rate. Using threshold models to capture non-linearities triggered by business cycle developments and equity markets dynamics*, September 2000
- R00-06** A. Baglioni – R. Hamaui, *The choice among alternative payment systems: the European experience*, September 2000
- R01-01** E. Bernini – D. Fantazzini, *Stima di strutture a termine: il caso dei Corporate Spread Finanziari*, Settembre 2001

IL VOSTRO INDIRIZZO È CORRETTO?

(per favore scrivete in stampatello)

NOME.....

SOCIETÀ.....

INDIRIZZO.....

CITTÀ.....

PROVINCIA.....

CAP-ZIP

STATO

Da restituire a:

INTESABCI SpA

Settore Studi e Analisi Finanziaria

via Borgonuovo 2

20121 Milano

fax (02) 88507195 - 6592469

(CR)

IntesaBci – Rete Comit è presente su Internet all'indirizzo <http://www.bci.it>

